

Gleichungen lösen durch Substitution

Klasse 9/10

2026-03-14

Grundidee

Bei Gleichungen, in denen ein Ausdruck t quadratisch vorkommt — also Gleichungen der Form

$$a t^2 + b t + c = 0$$

— lässt sich durch Substitution $u = t$ eine gewöhnliche quadratische Gleichung gewinnen. Typische Fälle: $t = x^2$, $t = x^3$, $t = z^{128}$, ...

Wichtig bei der Resubstitution: Gilt $t = x^{2k}$ (gerader Exponent), so ist $t \geq 0$. Negative Lösungen $u < 0$ scheiden dann aus — diese Lösungen **gehen verloren**. Bei ungeradem Exponenten ($t = x^3$ usw.) nimmt t jeden reellen Wert an, es gehen keine Lösungen verloren.

Aufgaben

Aufgabe 1

Löse $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Aufgabe 2

Löse $x^4 + x^2 - 6 = 0$.

Aufgabe 3

Löse $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$.

Aufgabe 4

Löse $z^{256} - 5z^{128} + 4 = 0$.

Aufgabe 5

Löse $z^{256} + z^{128} - 6 = 0$.

Lösungen

Lösung 1 — $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Substitution $u = x^2$:

$$u^2 - 5u + 4 = 0 \implies (u - 1)(u - 4) = 0 \implies u_1 = 1, \quad u_2 = 4$$

Resubstitution ($u \geq 0$, beide Lösungen gültig):

$$u_1 = x^2 = 1 \implies x = \pm 1$$

$$u_2 = x^2 = 4 \implies x = \pm 2$$

$$\mathbb{L} = \{-2, -1, 1, 2\}$$

Lösung 2 — $x^4 + x^2 - 6 = 0$

Substitution $u = x^2$:

$$u^2 + u - 6 = 0 \implies (u + 3)(u - 2) = 0 \implies u_1 = -3, \quad u_2 = 2$$

Resubstitution:

$u_1 = x^2 = -3 \implies$ keine reelle Lösung ($u_1 < 0$ scheidet aus — zwei Lösungen gehen verloren)

$$u_2 = x^2 = 2 \implies x = \pm\sqrt{2}$$

$$\mathbb{L} = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$$

Lösung 3 — $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

Substitution $u = x^3$:

$$u^2 - 9u + 8 = 0 \implies (u - 1)(u - 8) = 0 \implies u_1 = 1, \quad u_2 = 8$$

Resubstitution ($u = x^3$ nimmt jeden reellen Wert an, kein Verlust möglich):

$$u_1 = x^3 = 1 \implies x = 1$$

$$u_2 = x^3 = 8 \implies x = 2$$

$$\mathbb{L} = \{1, 2\}$$

Lösung 4 — $z^{256} - 5z^{128} + 4 = 0$

Substitution $u = z^{128}$:

$$u^2 - 5u + 4 = 0 \implies (u - 1)(u - 4) = 0 \implies u_1 = 1, \quad u_2 = 4$$

Die Gleichungsstruktur ist identisch zu Aufgabe 1 — nur der Exponent ist größer.

Resubstitution ($z^{128} \geq 0$, beide Lösungen gültig):

$$u_1 = z^{128} = 1 \implies z = \pm 1$$

$$u_2 = z^{128} = 4 \implies z = \pm \sqrt[128]{4} = \pm 2^{1/64}$$

$$\mathbb{L} = \{-2^{1/64}, -1, 1, 2^{1/64}\}$$

Lösung 5 — $z^{256} + z^{128} - 6 = 0$

Substitution $u = z^{128}$:

$$u^2 + u - 6 = 0 \implies (u + 3)(u - 2) = 0 \implies u_1 = -3, \quad u_2 = 2$$

Die Gleichungsstruktur ist identisch zu Aufgabe 2.

Resubstitution:

$u_1 = z^{128} = -3 \implies$ keine reelle Lösung ($u_1 < 0$ scheidet aus — zwei Lösungen gehen verloren)

$$u_2 = z^{128} = 2 \implies z = \pm \sqrt[128]{2} = \pm 2^{1/128}$$

$z^{256} \geq 0$ — das Prinzip ist identisch zu Aufgabe 2, egal wie groß der Exponent ist.

$$\mathbb{L} = \{-2^{1/128}, 2^{1/128}\}$$