

Nullstellen ganzrationaler Funktionen

Klasse 10

2026-03-14

Aufgaben

Bestimme alle reellen Nullstellen. Wähle jeweils ein geeignetes Verfahren.

Aufgabe 1

$$f(x) = 2x^2 - 5x - 3$$

Aufgabe 2

$$f(x) = x^3 - 9x$$

Aufgabe 3

$$f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$$

Aufgabe 4

$$f(x) = x^{1000} - 2x^{500} + 1$$

Aufgabe 5

$$f(x) = x^{201} - x$$

Aufgabe 6

$$f(x) = x^{50} - 3x^{25} - 4$$

Lösungen

Lösung 1 — Mitternachtsformel

$$2x^2 - 5x - 3 = 0 \implies x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4}$$

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\mathbb{L} = \{-\frac{1}{2}, 3\}$$

Lösung 2 — Ausklammern

$$x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x - 3)(x + 3)$$

$$\mathbb{L} = \{-3, 0, 3\}$$

Lösung 3 — Substitution ($u = x^2$)

$$u^2 - 13u + 36 = 0 \implies (u - 4)(u - 9) = 0 \implies u_1 = 4, \quad u_2 = 9$$

Resubstitution (beide $u > 0$, kein Verlust):

$$x^2 = 4 \implies x = \pm 2 \quad x^2 = 9 \implies x = \pm 3$$

$$\mathbb{L} = \{-3, -2, 2, 3\}$$

Lösung 4 — Substitution ($u = x^{500}$)

$$u^2 - 2u + 1 = (u - 1)^2 = 0 \implies u = 1$$

Resubstitution ($x^{500} \geq 0$, Lösung gültig):

$$x^{500} = 1 \implies x = \pm 1$$

Die Gleichungsstruktur ist identisch zu $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ — der Exponent ändert nur das Ergebnis der Resubstitution, nicht die Algebra.

$$\mathbb{L} = \{-1, 1\}$$

Lösung 5 — Ausklammern

$$x^{201} - x = x(x^{200} - 1) = 0$$

- $x = 0$
- $x^{200} = 1 \implies x = \pm 1$ (gerader Exponent ≥ 0 , beide Lösungen gültig)

$$\mathbb{L} = \{-1, 0, 1\}$$

Lösung 6 — Substitution ($u = x^{25}$), ungerader Exponent

$$u^2 - 3u - 4 = (u - 4)(u + 1) = 0 \implies u_1 = 4, \quad u_2 = -1$$

Resubstitution — x^{25} nimmt **jeden** reellen Wert an (ungerader Exponent!), daher gehen **keine** Lösungen verloren:

$$x^{25} = 4 \implies x = \sqrt[25]{4} \quad x^{25} = -1 \implies x = -1$$

$$\mathbb{L} = \{-1, \sqrt[25]{4}\}$$