

Newton-Verfahren

Klasse 11

2026-08-19

Grundidee

Viele Gleichungen $f(x) = 0$ lassen sich nicht exakt lösen. Das **Newton-Verfahren** liefert stattdessen beliebig genaue Näherungen.

Idee: Man ersetzt f in der Nähe eines Startwerts x_0 durch die **Tangente**. Deren Nullstelle ist der nächste Näherungswert x_1 . Dann wiederholt man das Ganze mit x_1 .

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Vorgehen:

1. $f'(x)$ berechnen
2. Startwert x_0 wählen (Nullstelle vorher grob eingrenzen — Skizze oder Vorzeichenwechsel von f)
3. Formel anwenden, bis sich die gewünschten Nachkommastellen nicht mehr ändern

Das Verfahren konvergiert **quadratisch**: bei guter Startwahl verdoppelt sich die Zahl der korrekten Nachkommastellen ungefähr mit jedem Schritt.

Wann es schiefgeht:

Situation	Folge
$f'(x_n) \approx 0$	Division durch fast 0 — der nächste Wert springt weit weg
Startwert zu weit entfernt	Konvergenz gegen eine <i>andere</i> Nullstelle oder gar keine
mehrere Nullstellen	welche gefunden wird, hängt vom Startwert ab

Aufgaben

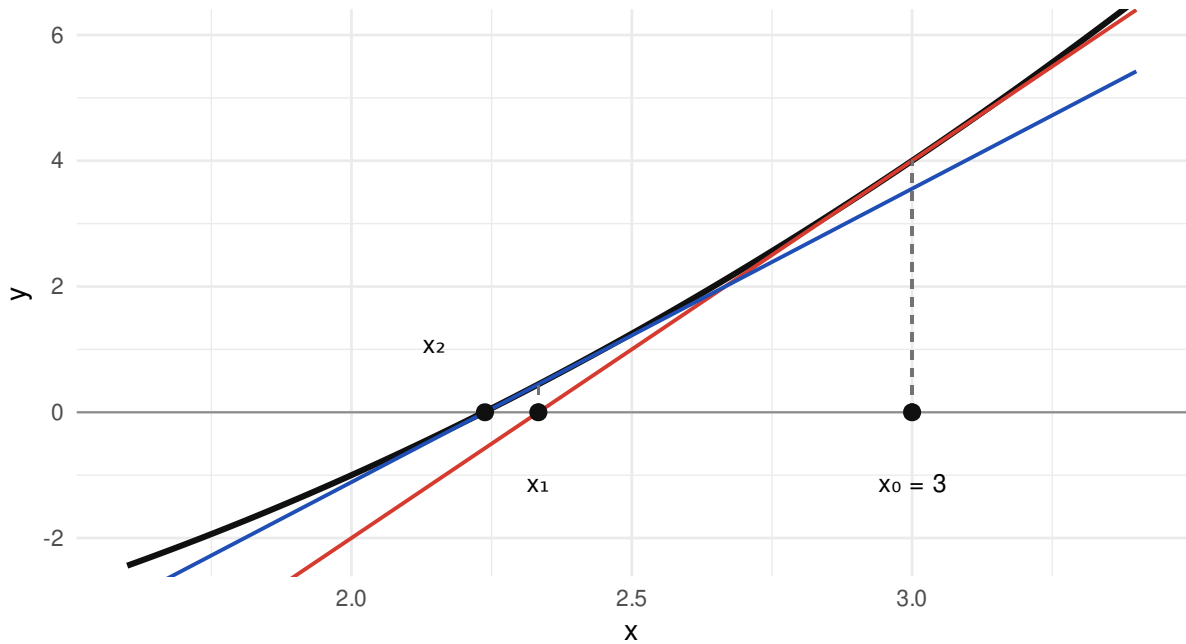


Abbildung 1: $f(x) = x^2 - 5$ mit Startwert $x = 3$. Die Tangente (rot) schneidet die x-Achse bei x_1 , die nächste Tangente (blau) bei x_2 — schon fast bei $\sqrt{5} \approx 2,2361$.

Aufgaben

Aufgabe 1

Bestimme mit dem Newton-Verfahren eine Näherung für $\sqrt{5}$, also für die positive Nullstelle von $f(x) = x^2 - 5$.

Verwende $x_0 = 2$ und berechne x_1 , x_2 und x_3 .

Aufgabe 2

Bestimme eine Näherung für $\sqrt[3]{2}$ als Nullstelle von $f(x) = x^3 - 2$ mit $x_0 = 2$.

Berechne x_1 , x_2 und x_3 .

Aufgabe 3

Die Gleichung $x^3 - x - 1 = 0$ ist nicht elementar lösbar.

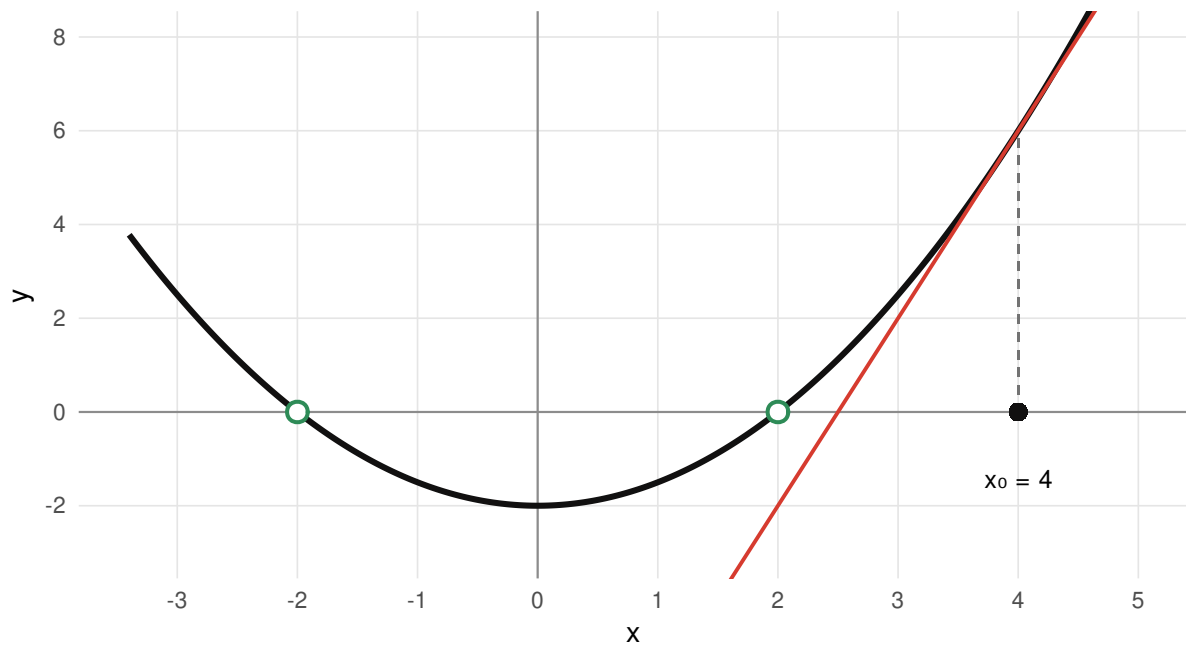
- Zeige durch Einsetzen, dass zwischen $x = 1$ und $x = 2$ eine Nullstelle liegt.
- Berechne mit $x_0 = 1,5$ die Näherungen x_1 , x_2 und x_3 .

Aufgabe 4

Die Abbildung zeigt eine Funktion f und die Tangente im Startpunkt bei $x_0 = 4$.

- Lies den nächsten Näherungswert x_1 aus der Zeichnung ab.
- Zeichne (gedanklich) die Tangente bei x_1 und schätze, wo x_2 ungefähr liegt.
- Gegen welche der beiden eingezeichneten Nullstellen konvergiert das Verfahren mit diesem Startwert?

Aufgaben



Aufgabe 5

Wende das Newton-Verfahren allgemein auf $f(x) = x^2 - a$ (mit $a > 0$) an und vereinfache die Iterationsformel so weit wie möglich.

Welches klassische Wurzelziehverfahren erhältst du?

Aufgabe 6

Gegeben ist $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ mit $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

- An welchen Stellen ist $f'(x) = 0$?
- Berechne x_1 und x_2 für den Startwert $x_0 = 1,9$.
- Erkläre, warum das Ergebnis so weit vom Startwert wegspringt.

Aufgabe 7

Bestimme mit dem Newton-Verfahren eine Näherung für die positive Nullstelle von

$$f(x) = x^{100} - 2$$

Verwende $x_0 = 1$ und berechne x_1 , x_2 und x_3 (auf 7 Nachkommastellen).

Aufgabe 8

Bestimme mit $x_0 = 200$ die Nullstelle von

$$f(x) = 10^{-3} x^3 - 3000$$

Berechne x_1 , x_2 und x_3 .

Lösungen

Lösung 1

$f(x) = x^2 - 5$, $f'(x) = 2x$, also

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 5}{2x_n}$$

$$x_1 = 2 - \frac{4 - 5}{4} = 2 + 0,25 = 2,25$$

$$x_2 = 2,25 - \frac{5,0625 - 5}{4,5} = 2,25 - \frac{0,0625}{4,5} \approx 2,2361111$$

$$x_3 \approx 2,2361111 - \frac{0,0001929}{4,4722222} \approx 2,2360680$$

Zum Vergleich: $\sqrt{5} = 2,2360680 \dots$ — nach drei Schritten bereits auf 7 Nachkommastellen genau.

Lösung 2

$f'(x) = 3x^2$, also $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2}{3x_n^2}$.

$$x_1 = 2 - \frac{8 - 2}{12} = 2 - 0,5 = 1,5$$

$$x_2 = 1,5 - \frac{3,375 - 2}{6,75} = 1,5 - \frac{1,375}{6,75} \approx 1,2962963$$

$$x_3 \approx 1,2962963 - \frac{0,1782757}{5,0411523} \approx 1,2609322$$

Zum Vergleich: $\sqrt[3]{2} = 1,2599210 \dots$ — hier sind erst zwei Nachkommastellen sicher, ein vierter Schritt liefert $x_4 \approx 1,2599219$.

Lösung 3

a) $f(1) = 1 - 1 - 1 = -1 < 0$ und $f(2) = 8 - 2 - 1 = 5 > 0$.

Da f als Polynom stetig ist und das Vorzeichen wechselt, liegt zwischen 1 und 2 mindestens eine Nullstelle.

b) $f'(x) = 3x^2 - 1$.

$$x_1 = 1,5 - \frac{3,375 - 1,5 - 1}{6,75 - 1} = 1,5 - \frac{0,875}{5,75} \approx 1,3478261$$

$$x_2 \approx 1,3478261 - \frac{0,1006822}{4,4499055} \approx 1,3252004$$

$$x_3 \approx 1,3252004 - \frac{0,0020584}{4,2684683} \approx 1,3247182$$

Der exakte Wert ist 1,3247180... (die „plastische Zahl“).

Lösung 4

a) Die Tangente schneidet die x -Achse bei $x_1 = 2,5$.

(Kontrolle: $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4)$, $f(4) = 6$, $f'(4) = 4$, also $x_1 = 4 - \frac{6}{4} = 2,5$.)

b) Die Tangente bei $x_1 = 2,5$ ist flacher und trifft die Achse knapp über 2 — etwa bei $x_2 \approx 2,05$.

(Kontrolle: $f(2,5) = 1,125$, $f'(2,5) = 2,5$, also $x_2 = 2,5 - 0,45 = 2,05$.)

c) Gegen die **rechte** Nullstelle $x = 2$. Die Tangenten führen von rechts kommend immer näher an sie heran; die linke Nullstelle $x = -2$ wird bei diesem Startwert nie erreicht.

Lösung 5

Mit $f(x) = x^2 - a$ und $f'(x) = 2x$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n}$$

Auf einen Bruch bringen:

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^2 - (x_n^2 - a)}{2x_n} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n}$$

Aufspalten:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

Das ist das **Heron-Verfahren** (babylonisches Wurzelziehen): Man mittelt den bisherigen Schätzwert x_n mit $\frac{a}{x_n}$. Ist x_n zu klein, so ist $\frac{a}{x_n}$ zu groß — der Mittelwert liegt dazwischen und damit näher an $\sqrt{a}$.

Lösung 6

- a) $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0$ und $x = 2$.
 b) $f(1,9) = 6,859 - 10,83 + 1 = -2,971$ und $f'(1,9) = 10,83 - 11,4 = -0,57$:

$$x_1 = 1,9 - \frac{-2,971}{-0,57} = 1,9 - 5,2123 \approx -3,3123$$

$$f(-3,3123) \approx -68,2533, \quad f'(-3,3123) \approx 52,7873$$

$$x_2 \approx -3,3123 - \frac{-68,2533}{52,7873} \approx -2,0193$$

- c) Der Startwert 1,9 liegt sehr nahe bei der Stelle $x = 2$, an der $f'(x) = 0$ ist. Dadurch wird der Nenner mit $-0,57$ betragsmäßig winzig, der Quotient $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ dagegen riesig — die Tangente verläuft fast waagrecht und schneidet die x -Achse weit außerhalb.

Das Verfahren konvergiert danach zwar noch (gegen die Nullstelle bei $\approx -0,53$), aber gegen eine **ganz andere** als die vom Startwert nahegelegte. Faustregel: Startwerte in der Nähe von Extremstellen meiden.

Lösung 7

$f'(x) = 100 x^{99}$, also

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^{100} - 2}{100 x_n^{99}}$$

$$x_1 = 1 - \frac{1 - 2}{100} = 1 + 0,01 = 1,01$$

$$x_2 = 1,01 - \frac{0,7048138}{267,8033494} \approx 1,0073682$$

$$x_3 \approx 1,0073682 - \frac{0,0836380}{206,8397725} \approx 1,0069638$$

Zum Vergleich: $\sqrt[100]{2} = 1,0069555 \dots$ Dieselbe Formel wie in Aufgabe 1, nur mit sehr großen Exponenten — die Rechnung selbst bleibt ein Einsetzen in dieselbe Iterationsvorschrift.

Lösung 8

$$f'(x) = 3 \cdot 10^{-3} x^2.$$

$$x_1 = 200 - \frac{10^{-3} \cdot 8 \cdot 10^6 - 3000}{3 \cdot 10^{-3} \cdot 40\,000} = 200 - \frac{5000}{120} \approx 158,3333$$

$$x_2 \approx 158,3333 - \frac{969,3287}{75,2083} \approx 145,4448$$

$$x_3 \approx 145,4448 - \frac{76,7639}{63,4625} \approx 144,2352$$

Die exakte Nullstelle ist $\sqrt[3]{3 \cdot 10^6} \approx 144,2250$. Ein weiterer Schritt liefert $x_4 \approx 144,2250$.