

Monotonie und Monotonietabelle

Klasse 11

2026-08-19

Grundidee

Die Ableitung $f'(x)$ ist die Steigung der Tangente — ihr **Vorzeichen** verrät daher, ob f steigt oder fällt.

Bedingung auf einem Intervall I	Folgerung
$f'(x) > 0$ für alle $x \in I$	f ist auf I streng monoton steigend
$f'(x) < 0$ für alle $x \in I$	f ist auf I streng monoton fallend
$f'(x) = 0$ für alle $x \in I$	f ist auf I konstant

Vorgehen (Monotonietabelle):

1. $f'(x)$ berechnen
2. Nullstellen von f' bestimmen — sie sind die **Grenzen** der Monotoniebereiche
3. In jedem Teilintervall einen **Probewert** einsetzen und das Vorzeichen von f' notieren
4. Monotonieverhalten ablesen

Achtung: Eine einzelne Stelle mit $f'(x_0) = 0$ zerstört die Monotonie nicht. Wechselt f' dort das Vorzeichen *nicht*, so bleibt f über die Stelle hinweg monoton — etwa $f(x) = x^3$ bei $x_0 = 0$.

Aufgaben

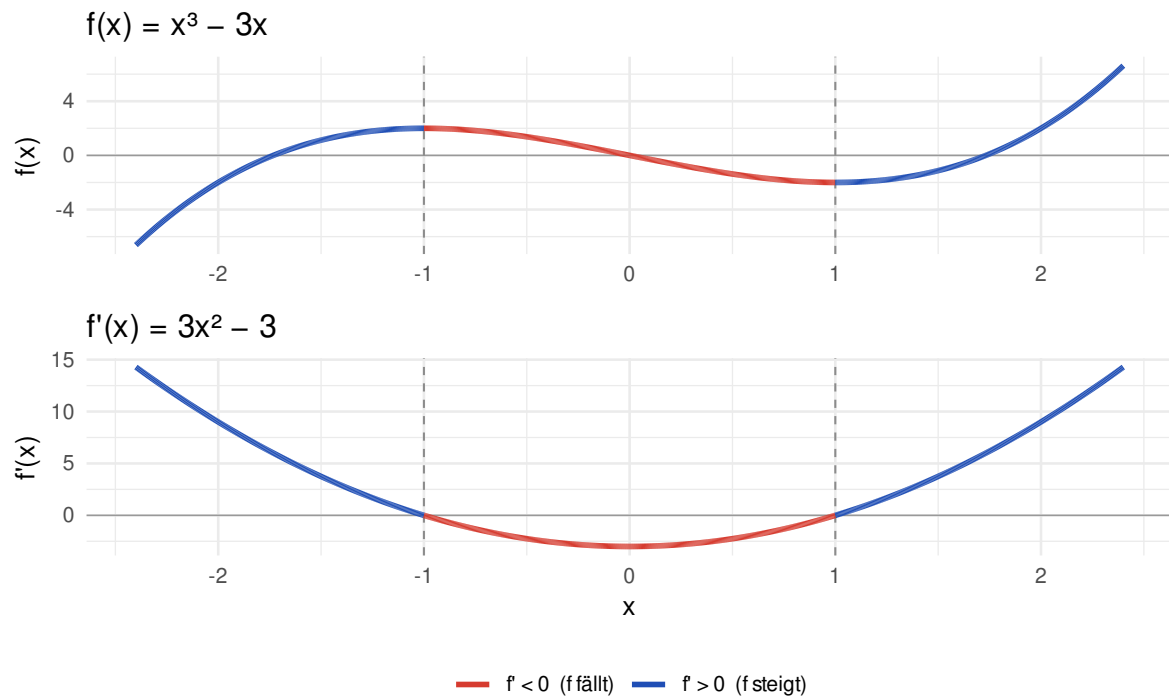


Abbildung 1: Oben $f(x) = x^3 - 3x$, unten die Ableitung $f'(x) = 3x^2 - 3$. Wo f' unterhalb der Achse liegt (rot), fällt f .

Aufgaben

Aufgabe 1

Bestimme das Monotonieverhalten von

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

Stelle dazu eine Monotonietabelle auf.

Aufgabe 2

Untersuche $f(x) = x^3 - 3x$ auf Monotonie.

Aufgabe 3

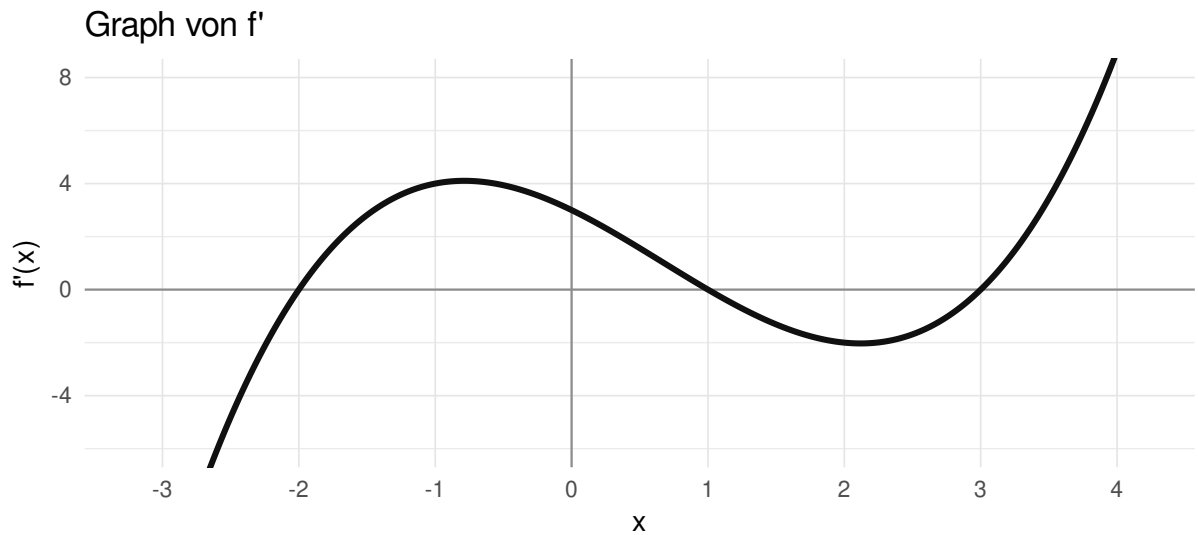
Untersuche auf Monotonie:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1$$

Aufgabe 4

Abgebildet ist der Graph der **Ableitung** f' einer Funktion f (nicht f selbst!).

Gib an, auf welchen Intervallen f streng monoton steigt bzw. fällt, und an welchen Stellen f Hoch- bzw. Tiefpunkte besitzt.



Aufgabe 5

Untersuche auf Monotonie:

$$f(x) = x^4 - 8x^2$$

Aufgabe 6

Untersuche auf Monotonie:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x$$

Was ist an dieser Funktion bemerkenswert?

Aufgabe 7

Untersuche auf Monotonie:

$$f(x) = x^{101} - 101x$$

Aufgabe 8

Untersuche auf Monotonie:

$$f(x) = 10^{-4}x^3 - 12x$$

Lösungen

Lösung 1

$$f'(x) = 2x - 4 = 2(x - 2)$$

Nullstelle von f' : $x = 2$.

Intervall	Probewert	f'	Monotonie
$(-\infty, 2)$	$x = 0: f'(0) = -4$	$-$	fallend
$(2, +\infty)$	$x = 3: f'(3) = 2$	$+$	steigend

f fällt auf $(-\infty, 2)$ und steigt auf $(2, +\infty)$; bei $x = 2$ liegt der Scheitel $TP(2 \mid -1)$.

Lösung 2

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$$

Nullstellen: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

Intervall	Probewert	f'	Monotonie
$(-\infty, -1)$	$f'(-2) = 9$	$+$	steigend
$(-1, 1)$	$f'(0) = -3$	$-$	fallend
$(1, +\infty)$	$f'(2) = 9$	$+$	steigend

Lösung 3

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$$

Nullstellen: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

Intervall	Probewert	f'	Monotonie
$(-\infty, -1)$	$f'(-2) = 5$	$+$	steigend
$(-1, 3)$	$f'(0) = -3$	$-$	fallend
$(3, +\infty)$	$f'(4) = 5$	$+$	steigend

Zugehörige Punkte: $HP(-1 \mid \frac{8}{3})$ und $TP(3 \mid -8)$.

Lösung 4

Abgelesen werden die **Nullstellen von f'** und das **Vorzeichen** dazwischen — der abgebildete Graph ist bereits f' , es muss also nichts mehr abgeleitet werden.

Nullstellen von f' : $x = -2$, $x = 1$, $x = 3$.

Intervall	Lage von f'	Monotonie von f
$(-\infty, -2)$	unterhalb der Achse	fallend
$(-2, 1)$	oberhalb	steigend
$(1, 3)$	unterhalb	fallend
$(3, +\infty)$	oberhalb	steigend

Vorzeichenwechsel von f' :

- bei $x = -2$ von $-$ nach $+$ $\rightarrow$ **Tiefpunkt** von f
- bei $x = 1$ von $+$ nach $-$ $\rightarrow$ **Hochpunkt** von f
- bei $x = 3$ von $-$ nach $+$ $\rightarrow$ **Tiefpunkt** von f

Die y -Werte dieser Punkte lassen sich aus dem Graphen von f' **nicht** ablesen — dazu bräuchte man f selbst.

Lösung 5

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x - 2)(x + 2)$$

Nullstellen: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$.

Intervall	Probewert	f'	Monotonie
$(-\infty, -2)$	$f'(-3) = -60$	$-$	fallend
$(-2, 0)$	$f'(-1) = 12$	$+$	steigend
$(0, 2)$	$f'(1) = -12$	$-$	fallend
$(2, +\infty)$	$f'(3) = 60$	$+$	steigend

Punkte: $TP(-2 \mid -16)$, $HP(0 \mid 0)$, $TP(2 \mid -16)$.

Lösung 6

$$f'(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

Einzigste Nullstelle: $x = 1$ — sie ist aber **doppelt**.

Intervall	Probewert	f'	Monotonie
$(-\infty, 1)$	$f'(0) = 1$	+	steigend
$(1, +\infty)$	$f'(2) = 1$	+	steigend

Bemerkenswert: f' wechselt bei $x = 1$ das Vorzeichen **nicht** (ein Quadrat ist nie negativ). Deshalb ist f auf **ganz** $\mathbb{R}$ streng monoton steigend, obwohl $f'(1) = 0$ gilt. An der Stelle $x = 1$ hat der Graph eine waagrechte Tangente, aber **kein** Extremum — es liegt ein Terrassenpunkt vor.

Lösung 7

$$f'(x) = 101x^{100} - 101 = 101(x^{100} - 1)$$

Nullstellen: $x^{100} = 1 \Rightarrow x = 1$ oder $x = -1$ (der Exponent ist gerade, daher beide Vorzeichen).

Für das Vorzeichen genügt der Vergleich von x^{100} mit 1:

Intervall	Probewert	f'	Monotonie
$(-\infty, -1)$	$x = -2: 2^{100} > 1$	+	steigend
$(-1, 1)$	$x = 0: 0 - 1 = -1$	-	fallend
$(1, +\infty)$	$x = 2: 2^{100} > 1$	+	steigend

Dasselbe Bild wie in Aufgabe 2 — nur mit x^{100} statt x^2 . Punkte: $HP(-1 \mid 100)$ und $TP(1 \mid -100)$.

Lösung 8

$$f'(x) = 3 \cdot 10^{-4} x^2 - 12$$

Nullstellen:

$$3 \cdot 10^{-4} x^2 = 12 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{12}{3 \cdot 10^{-4}} = 40\,000 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 200$$

Intervall	Probewert	f'	Monotonie
$(-\infty, -200)$	$f'(-300) = 15$	+	steigend
$(-200, 200)$	$f'(0) = -12$	-	fallend
$(200, +\infty)$	$f'(300) = 15$	+	steigend

Punkte: $HP(-200 \mid 1600)$ und $TP(200 \mid -1600)$. Das Verfahren ist identisch zu Aufgabe 2; nur die Intervallgrenzen liegen weit außen.