

Kurvendiskussion ganzrationaler Funktionen

Klasse 11

2026-08-19

Grundidee

Eine **Kurvendiskussion** untersucht alle wesentlichen Eigenschaften einer Funktion in fester Reihenfolge. Für ganzrationale Funktionen sind das sieben Schritte:

Schritt	Was	Wie
1	Definitionsmenge	bei Polynomen stets $D = \mathbb{R}$
2	Symmetrie	nur gerade Exponenten $\rightarrow$ achsensymmetrisch; nur ungerade $\rightarrow$ punktsymmetrisch
3	Nullstellen	$f(x) = 0$: ausklammern, substituieren oder Mitternachtsformel
4	Extrempunkte	$f'(x_0) = 0$, dann $f''(x_0)$ prüfen
5	Wendepunkte	$f''(x_0) = 0$, dann Vorzeichenwechsel prüfen
6	Grenzverhalten	nur der Leitterm $a_n x^n$ zählt
7	Graph	alle Punkte eintragen und verbinden

Nützlich: Schritt 2 halbiert die Arbeit. Ist f achsensymmetrisch, genügt es, die rechte Hälfte zu untersuchen — links spiegelt sich alles.

Aufgaben

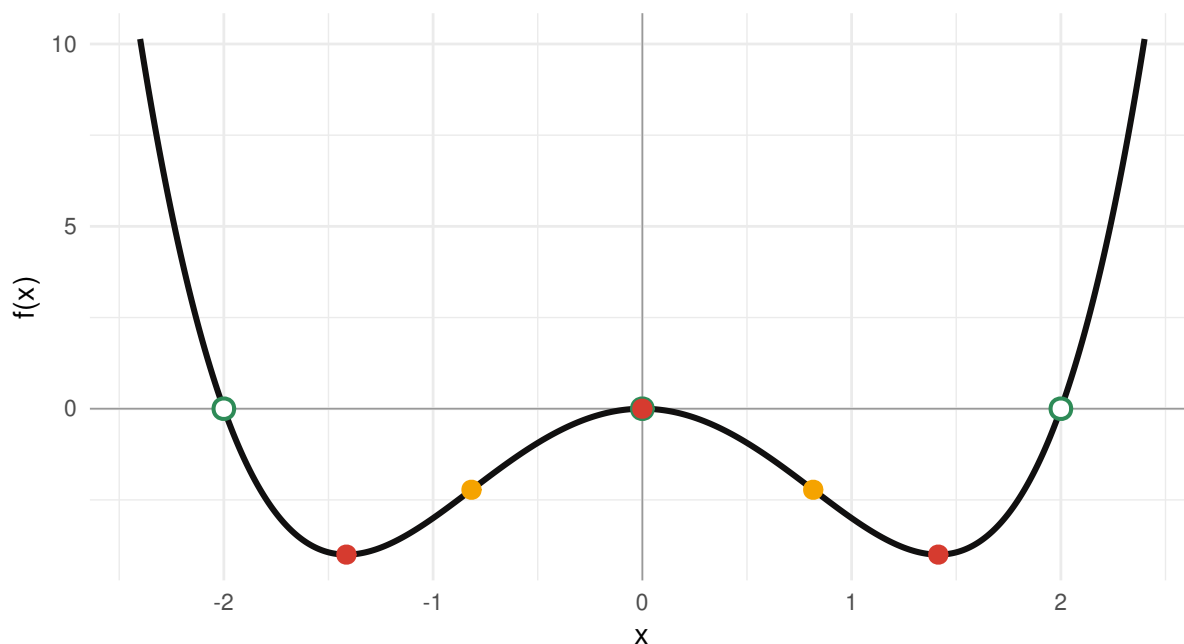


Abbildung 1: Ergebnis einer vollständigen Kurvendiskussion von $f(x) = x^3 - 4x^2$. Rot: Extrempunkte, orange: Wendepunkte, grün: Nullstellen.

Aufgaben

Aufgabe 1

Führe eine vollständige Kurvendiskussion durch für

$$f(x) = x^3 - 3x$$

Aufgabe 2

Führe eine vollständige Kurvendiskussion durch für

$$f(x) = x^4 - 4x^2$$

Aufgabe 3

Führe eine vollständige Kurvendiskussion durch für

$$f(x) = -x^3 + 3x^2$$

Aufgabe 4

Gegeben ist $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5$.

Bestimme Extrempunkte, Wendepunkt und Grenzwert. (Die Nullstellen sind hier nicht exakt bestimmbar — lass sie weg.)

Aufgabe 5

Gesucht ist eine ganzrationale Funktion f vom Grad 3, deren Graph punktsymmetrisch zum Ursprung ist und den Hochpunkt $HP(-1 \mid 2)$ besitzt.

Bestimme den Funktionsterm.

Aufgabe 6

Führe eine vollständige Kurvendiskussion durch für

$$f(x) = 10^{-4} x^4 - 2x^2$$

Aufgabe 7

Untersuche $f(x) = x^{100} - 100x$ auf Symmetrie, Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte und Grenzverhalten.

Lösungen

Lösung 1

1. **Definitionsmenge:** $D = \mathbb{R}$

2. **Symmetrie:** Exponenten 3 und 1 — alle ungerade $\rightarrow f(-x) = -f(x)$, **punktsymmetrisch zum Ursprung.**

3. **Nullstellen:** $x^3 - 3x = x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_{2,3} = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1,73$

4. **Extrempunkte:** $f'(x) = 3x^2 - 3, f''(x) = 6x$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1.$$

- $f''(-1) = -6 < 0 \rightarrow HP(-1 \mid 2)$
- $f''(1) = 6 > 0 \rightarrow TP(1 \mid -2)$

5. **Wendepunkte:** $f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$, Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ $\rightarrow W(0 \mid 0)$

6. **Grenzverhalten:** Leitterm x^3 , Grad ungerade, positiv:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

7. **Graph:** steigt bis $HP(-1 \mid 2)$, fällt durch $W(0 \mid 0)$ bis $TP(1 \mid -2)$, steigt dann wieder.

Lösung 2

1. $D = \mathbb{R}$

2. **Symmetrie:** Exponenten 4 und 2 — alle gerade $\rightarrow$ **achsensymmetrisch zur y -Achse.**

3. **Nullstellen:** $x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4) = x^2(x - 2)(x + 2) = 0$

$$x_1 = 0 \text{ (doppelt)}, x_2 = 2, x_3 = -2$$

4. **Extrempunkte:** $f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2), f''(x) = 12x^2 - 8$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ oder } x = \pm\sqrt{2}.$$

- $f''(0) = -8 < 0 \rightarrow HP(0 \mid 0)$
- $f''(\pm\sqrt{2}) = 24 - 8 = 16 > 0 \rightarrow TP(-\sqrt{2} \mid -4)$ und $TP(\sqrt{2} \mid -4)$

5. Wendepunkte: $12x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{3} \approx \pm 0,82$

f'' ist eine nach oben geöffnete Parabel $\rightarrow$ Vorzeichenwechsel an beiden Stellen

$$f\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{4}{9} - \frac{8}{3} = -\frac{20}{9} \approx -2,22$$

$$W_1\left(-\frac{\sqrt{6}}{3} \mid -\frac{20}{9}\right), \quad W_2\left(\frac{\sqrt{6}}{3} \mid -\frac{20}{9}\right)$$

6. Grenzverhalten: Leitterm x^4 , Grad gerade, positiv $\rightarrow +\infty$ für $x \rightarrow \pm\infty$.

7. Der Graph ist die typische „W-Form“ mit zwei Tiefpunkten und einem Hochpunkt dazwischen (siehe Bild oben).

Lösung 3

1. $D = \mathbb{R}$

2. Symmetrie: Exponenten 3 und 2 — gemischt $\rightarrow$ **keine** der beiden Symmetrien.

3. Nullstellen: $-x^3 + 3x^2 = x^2(-x + 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ (doppelt), $x_2 = 3$

4. Extrempunkte: $f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x - 2)$, $f''(x) = -6x + 6$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = 2$.

- $f''(0) = 6 > 0 \rightarrow TP(0 \mid 0)$
- $f''(2) = -6 < 0 \rightarrow HP(2 \mid 4)$

5. Wendepunkt: $-6x + 6 = 0 \Rightarrow x = 1$, Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$

$f(1) = -1 + 3 = 2 \Rightarrow W(1 \mid 2)$

6. Grenzverhalten: Leitterm $-x^3$, Grad ungerade, negativ:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

7. Der Graph kommt von oben links, hat bei $x = 0$ einen Tiefpunkt (zugleich doppelte Nullstelle — er berührt dort die x -Achse), steigt zum $HP(2 \mid 4)$ und fällt dann durch $x = 3$ nach unten.

Lösung 4

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1), \quad f''(x) = 2x - 2$$

Extrempunkte: $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

- $f''(-1) = -4 < 0 \rightarrow$ Maximum. $f(-1) = -\frac{1}{3} - 1 + 3 + 5 = \frac{20}{3} \approx 6,67 \rightarrow HP(-1 \mid \frac{20}{3})$

- $f''(3) = 4 > 0 \rightarrow$ Minimum. $f(3) = 9 - 9 - 9 + 5 = -4 \rightarrow TP(3 \mid -4)$

Wendepunkt: $2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$, Vorzeichenwechsel

$$f(1) = \frac{1}{3} - 1 - 3 + 5 = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad W(1 \mid \frac{4}{3})$$

Grenzverhalten: Leitterm $\frac{1}{3}x^3$, ungerader Grad, positiv $\rightarrow +\infty$ rechts, $-\infty$ links.

Beachte: Der Wendepunkt liegt genau in der Mitte zwischen den beiden Extremstellen ($\frac{-1+3}{2} = 1$)
— bei Funktionen dritten Grades ist das immer so.

Lösung 5

Punktsymmetrie zum Ursprung bei Grad 3 bedeutet: nur ungerade Exponenten, also

$$f(x) = ax^3 + bx$$

Zwei Bedingungen aus dem Hochpunkt $HP(-1 \mid 2)$:

1. Waagrechte Tangente: $f'(-1) = 0$ mit $f'(x) = 3ax^2 + b$:

$$3a + b = 0$$

2. Der Punkt liegt auf dem Graphen: $f(-1) = 2$:

$$-a - b = 2$$

Aus (1): $b = -3a$. Einsetzen in (2):

$$-a + 3a = 2 \quad \Rightarrow \quad 2a = 2 \quad \Rightarrow \quad a = 1, \quad b = -3$$

$$f(x) = x^3 - 3x$$

Probe: $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f'(-1) = 0$, $f(-1) = -1 + 3 = 2$, $f''(-1) = -6 < 0 \rightarrow$ tatsächlich ein Hochpunkt

Lösung 6

1. $D = \mathbb{R}$

2. Symmetrie: Exponenten 4 und 2 — beide gerade $\rightarrow$ **achsensymmetrisch zur y-Achse.**

- 3. Nullstellen:** $x^2(10^{-4}x^2 - 2) = 0$

$$x_1 = 0 \text{ (doppelt) oder } x^2 = \frac{2}{10^{-4}} = 20\,000 \Rightarrow x = \pm 100\sqrt{2} \approx \pm 141,4$$

- 4. Extrempunkte:** $f'(x) = 4 \cdot 10^{-4}x^3 - 4x = 4x(10^{-4}x^2 - 1)$, $f''(x) = 12 \cdot 10^{-4}x^2 - 4$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ oder } x^2 = 10^4 \Rightarrow x = \pm 100.$$

- $f''(0) = -4 < 0 \rightarrow HP(0 \mid 0)$
- $f''(\pm 100) = 12 \cdot 10^{-4} \cdot 10^4 - 4 = 12 - 4 = 8 > 0$

$$f(100) = 10^{-4} \cdot 10^8 - 2 \cdot 10^4 = 10^4 - 2 \cdot 10^4 = -10^4$$

$$TP(-100 \mid -10\,000), \quad TP(100 \mid -10\,000)$$

5. Wendepunkte: $12 \cdot 10^{-4} x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{10^4}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{100}{\sqrt{3}} = \pm \frac{100\sqrt{3}}{3} \approx \pm 57,7$

$$f\left(\pm \frac{100}{\sqrt{3}}\right) = 10^{-4} \cdot \frac{10^8}{9} - 2 \cdot \frac{10^4}{3} = \frac{10^4}{9} - \frac{6 \cdot 10^4}{9} = -\frac{5 \cdot 10^4}{9} \approx -5555,6$$

6. Grenzverhalten: Leitterm $10^{-4}x^4$, gerader Grad, positiver Koeffizient $\rightarrow +\infty$ für $x \rightarrow \pm\infty$.

7. Dieselbe „W-Form“ wie in Aufgabe 2 — nur um den Faktor ≈ 70 in x -Richtung gestreckt.

Lösung 7

Symmetrie: Exponenten 100 (gerade) und 1 (ungerade) — gemischt $\rightarrow$ **keine** Symmetrie.

Nullstellen: $x^{100} - 100x = x(x^{99} - 100) = 0$

$x_1 = 0$ oder $x^{99} = 100 \Rightarrow x_2 = \sqrt[99]{100} \approx 1,048$ (der Exponent 99 ist ungerade, also genau eine reelle Lösung).

Extrempunkte: $f'(x) = 100x^{99} - 100 = 100(x^{99} - 1)$, $f''(x) = 9900x^{98}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^{99} = 1 \Rightarrow x = 1$ (einzige reelle Lösung).

$f''(1) = 9900 > 0 \rightarrow$ Minimum. $f(1) = 1 - 100 = -99$:

$$TP(1 \mid -99)$$

Wendepunkte: $f''(x) = 9900x^{98} = 0$ nur bei $x = 0$. Da 98 gerade ist, gilt $x^{98} \geq 0$ — **kein** Vorzeichenwechsel, also **kein** Wendepunkt. Der Graph ist überall linksgekrümmt.

Grenzverhalten: Leitterm x^{100} , gerader Grad, positiv $\rightarrow +\infty$ für $x \rightarrow \pm\infty$.

Der Graph sieht aus wie eine sehr flache, dann extrem steil ansteigende Wanne mit dem Tiefpunkt bei $x = 1$. Jeder Schritt lief genau wie in Aufgabe 1 — nur die Paritäten der Exponenten muss man sorgfältig beachten.