

Krümmung und Wendestellen

Klasse 11

2026-08-19

Grundidee

Die zweite Ableitung beschreibt, wie sich die Steigung f' selbst ändert — also die **Wölbung** der Kurve.

Bedingung	Krümmung	Anschauung
$f''(x) > 0$	Linkskrümmung (konvex)	nach oben geöffnet
$f''(x) < 0$	Rechtskrümmung (konkav)	nach unten geöffnet

Wendestelle. An einer Stelle x_0 , an der die Krümmung **wechselt**, liegt eine Wendestelle; der Punkt $W(x_0 \mid f(x_0))$ heißt Wendepunkt.

- **Notwendig:** $f''(x_0) = 0$
- **Hinreichend:** f'' wechselt bei x_0 das **Vorzeichen**

Wie bei den Extremstellen ist $f''(x_0) = 0$ allein zu wenig: bei $f(x) = x^4$ ist $f''(0) = 0$, aber $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ wechselt das Vorzeichen nicht — **kein** Wendepunkt.

Sattelpunkt (Terrassenpunkt). Gilt an einer Wendestelle zusätzlich $f'(x_0) = 0$, so ist die Tangente dort waagrecht. Der Wendepunkt heißt dann **Sattelpunkt** — ein Extremum ist es nicht.

Deutung im Sachkontext. Am Wendepunkt nimmt f' seinen größten (oder kleinsten) Wert an: dort wächst f am **schnellsten** bzw. am langsamsten. In Wachstumsmodellen ist das die Stelle der stärksten Zunahme.

Aufgaben

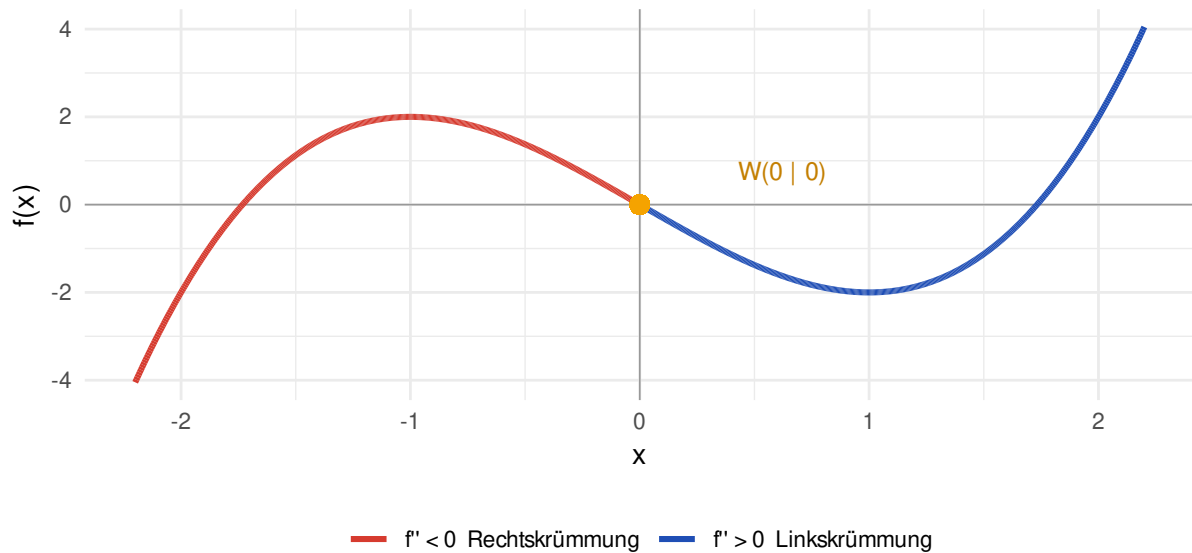


Abbildung 1: $f(x) = x^3 - 3x$: rechtsgekrümmt für $x < 0$, linksgekrümmt für $x > 0$, Wendepunkt $W(0|0)$

Aufgaben

Aufgabe 1

Bestimme das Krümmungsverhalten und alle Wendepunkte von

$$f(x) = x^3 - 3x$$

Aufgabe 2

Bestimme Krümmungsverhalten und Wendepunkte von

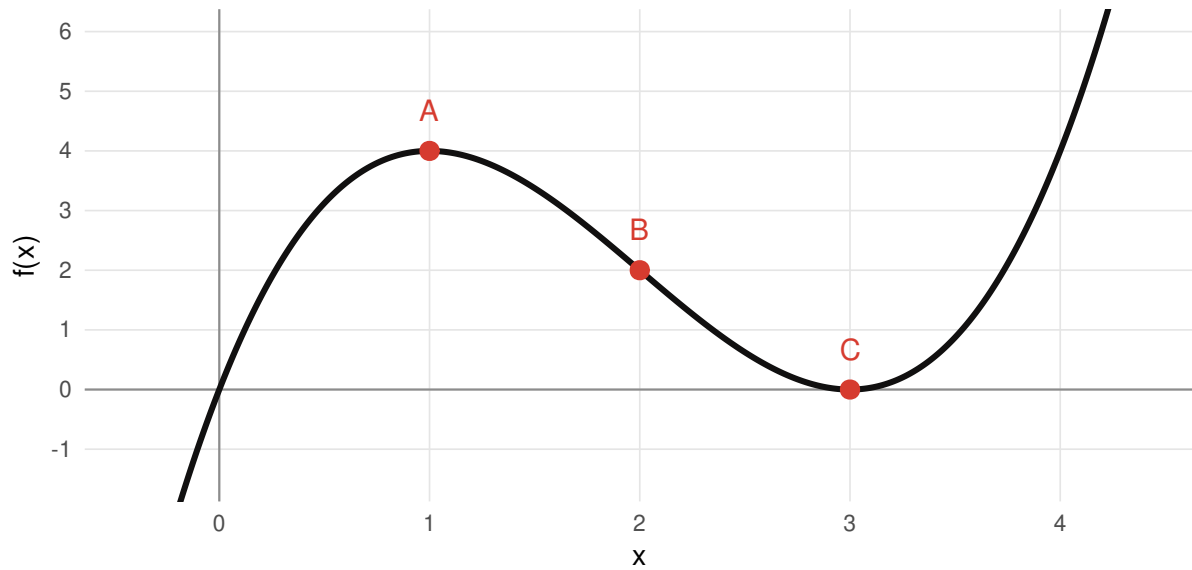
$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

Aufgabe 3

Der Graph zeigt eine ganzrationale Funktion f vom Grad 3.

- Lies ab, auf welchen Intervallen f rechts- bzw. linksgekrümmt ist.
- Gib die Wendestelle an.
- An welcher der drei markierten Stellen A , B , C ist die Steigung von f am kleinsten? Begründe.

Aufgaben



Aufgabe 4

Bestimme alle Wendepunkte von

$$f(x) = x^4 - 8x^2$$

Aufgabe 5

Untersuche jeweils auf Wendestellen:

- a) $f(x) = x^4$
- b) $g(x) = (x - 1)^3$

Welcher besondere Punkt liegt bei g vor?

Aufgabe 6

Die Anzahl der Bakterien in einer Kultur wird für $0 \leq t \leq 6$ (in Stunden) modelliert durch

$$N(t) = -t^3 + 6t^2 \quad (\text{in Millionen})$$

- a) Zu welchem Zeitpunkt wächst die Kultur am schnellsten?
- b) Wie groß ist die Wachstumsrate zu diesem Zeitpunkt?
- c) Wie viele Bakterien gibt es dann?

Aufgabe 7

Untersuche auf Wendestellen:

$$f(x) = x^{102}$$

Aufgabe 8

Bestimme Krümmungsverhalten und Wendepunkt von

$$f(x) = 10^{-3} x^3 - 3x^2$$

Lösungen

Lösung 1

$$f'(x) = 3x^2 - 3, \quad f''(x) = 6x$$

Notwendige Bedingung: $6x = 0 \Rightarrow x_0 = 0$.

Intervall	Probewert	f''	Krümmung
$(-\infty, 0)$	$f''(-1) = -6$	$-$	rechtsgekrümmt
$(0, +\infty)$	$f''(1) = 6$	$+$	linksgekrümmt

Vorzeichenwechsel $\rightarrow$ Wendestelle bei $x_0 = 0$, $f(0) = 0$:

$$W(0 \mid 0)$$

Wegen $f'(0) = -3 \neq 0$ ist es **kein** Sattelpunkt.

Lösung 2

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9, \quad f''(x) = 6x - 12$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x_0 = 2.$$

Intervall	Probewert	f''	Krümmung
$(-\infty, 2)$	$f''(0) = -12$	$-$	rechtsgekrümmt
$(2, +\infty)$	$f''(3) = 6$	$+$	linksgekrümmt

$$f(2) = 8 - 24 + 18 = 2 \quad \Rightarrow \quad W(2 \mid 2)$$

Lösung 3

- Links von $x = 2$ ist der Graph nach unten gewölbt $\rightarrow$ **rechtsgekrümmt** auf $(-\infty, 2)$.
Rechts davon ist er nach oben gewölbt $\rightarrow$ **linksgekrümmt** auf $(2, +\infty)$.
- Der Krümmungswechsel liegt bei $x = 2$, also ist $x = 2$ die **Wendestelle** (Punkt B , hier $W(2 \mid 2)$).

- c) An der Wendestelle B . Zwischen den beiden waagrechten Tangenten bei A und C fällt der Graph; am steilsten fällt er genau in der Mitte, im Wendepunkt. Dort nimmt f' seinen kleinsten Wert an. In A und C ist die Tangente waagrecht, also $f' = 0$ — beide Werte sind größer als der negative Wert in B .

(Rechnerisch: $f'(2) = 12 - 24 + 9 = -3$, gegenüber $f'(1) = f'(3) = 0$.)

Lösung 4

$$f'(x) = 4x^3 - 16x, \quad f''(x) = 12x^2 - 16$$

$$12x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx \pm 1,155$$

f'' ist eine nach oben geöffnete Parabel — zwischen den Nullstellen negativ, außerhalb positiv. Also Vorzeichenwechsel an beiden Stellen

$$f\left(\pm \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 8 \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{9} - \frac{96}{9} = -\frac{80}{9} \approx -8,89$$

$$W_1\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3} \mid -\frac{80}{9}\right), \quad W_2\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \mid -\frac{80}{9}\right)$$

Lösung 5

a) $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$.

$f''(x) = 0$ nur bei $x_0 = 0$. Aber $12x^2 \geq 0$ für alle x — **kein** Vorzeichenwechsel. Also hat $f(x) = x^4$ **keine** Wendestelle; der Graph ist überall linksgekrümmt.

b) $g(x) = (x - 1)^3$, ausmultipliziert $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

$$g'(x) = 3(x - 1)^2, \quad g''(x) = 6(x - 1)$$

$g''(x) = 0 \Rightarrow x_0 = 1$, mit Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ $\rightarrow$ Wendestelle.

Zusätzlich ist $g'(1) = 0$: die Tangente ist dort **waagrecht**. Es liegt also ein **Sattelpunkt** vor:

$$S(1 \mid 0)$$

Ein Extremum ist das nicht — g ist auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton steigend.

Lösung 6

- a) Am schnellsten wächst N dort, wo die Wachstumsrate N' maximal ist — das ist die **Wendestelle**.

$$N'(t) = -3t^2 + 12t, \quad N''(t) = -6t + 12$$

$$N''(t) = 0 \Rightarrow t = 2$$

Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$ (aus Linkskrümmung wird Rechtskrümmung) $\rightarrow$ Wendestelle bei $t = 2$.

Nach **2 Stunden** wächst die Kultur am schnellsten.

- b) $N'(2) = -3 \cdot 4 + 12 = 12$ — die Wachstumsrate beträgt 12 Millionen Bakterien pro Stunde.
 c) $N(2) = -8 + 24 = 16$ — es sind dann 16 Millionen Bakterien vorhanden. Der Wendepunkt ist $W(2 \mid 16)$.

Lösung 7

$$f'(x) = 102 x^{101}, \quad f''(x) = 102 \cdot 101 x^{100} = 10\,302 x^{100}$$

$f''(x) = 0$ nur bei $x_0 = 0$. Der Exponent 100 ist **gerade**, also gilt $x^{100} \geq 0$ für alle x und damit $f''(x) \geq 0$ — **kein** Vorzeichenwechsel.

f hat **keine** Wendestelle und ist überall linksgekrümmt. Genau dieselbe Situation wie bei x^4 in Aufgabe 5a), nur mit größeren Exponenten.

Lösung 8

$$f'(x) = 3 \cdot 10^{-3} x^2 - 6x, \quad f''(x) = 6 \cdot 10^{-3} x - 6$$

$$6 \cdot 10^{-3} x = 6 \Rightarrow x_0 = \frac{6}{6 \cdot 10^{-3}} = 1000$$

Intervall	Probewert	f''	Krümmung
$(-\infty, 1000)$	$f''(0) = -6$	$-$	rechtsgekrümmt
$(1000, +\infty)$	$f''(2000) = 6$	$+$	linksgekrümmt

Vorzeichenwechsel

$$f(1000) = 10^{-3} \cdot 10^9 - 3 \cdot 10^6 = 10^6 - 3 \cdot 10^6 = -2 \cdot 10^6$$

$$W(1000 \mid -2\,000\,000)$$

Dasselbe Vorgehen wie in Aufgabe 2; nur liegt der Wendepunkt sehr weit außen und sehr tief.