

Extremstellen bestimmen

Klasse 11

2026-08-19

Grundidee

Notwendige Bedingung. Hat f an der Stelle x_0 ein lokales Extremum und ist dort differenzierbar, so gilt

$$f'(x_0) = 0$$

Das ist nur eine **Vorauswahl**: $f'(x_0) = 0$ allein garantiert kein Extremum (Gegenbeispiel $f(x) = x^3$ bei $x_0 = 0$). Man braucht zusätzlich eine hinreichende Bedingung.

Hinreichend I — Vorzeichenwechselkriterium (VZK). Sei $f'(x_0) = 0$:

f' wechselt bei x_0	Ergebnis
von + nach −	lokales Maximum
von − nach +	lokales Minimum
kein Wechsel	kein Extremum (Terrassenpunkt)

Hinreichend II — zweite Ableitung. Sei $f'(x_0) = 0$:

$f''(x_0)$	Ergebnis
$f''(x_0) < 0$	lokales Maximum (Rechtskrümmung)
$f''(x_0) > 0$	lokales Minimum (Linkskrümmung)
$f''(x_0) = 0$	keine Aussage — VZK verwenden

Lokal und global. Ein *lokales* Extremum ist nur im Vergleich mit der Umgebung extrem. Auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ muss man für die *globalen* Extrema alle lokalen Extremwerte **und** die beiden Randwerte $f(a)$, $f(b)$ vergleichen — das globale Extremum kann am Rand liegen, wo $f' \neq 0$ ist.

Aufgaben

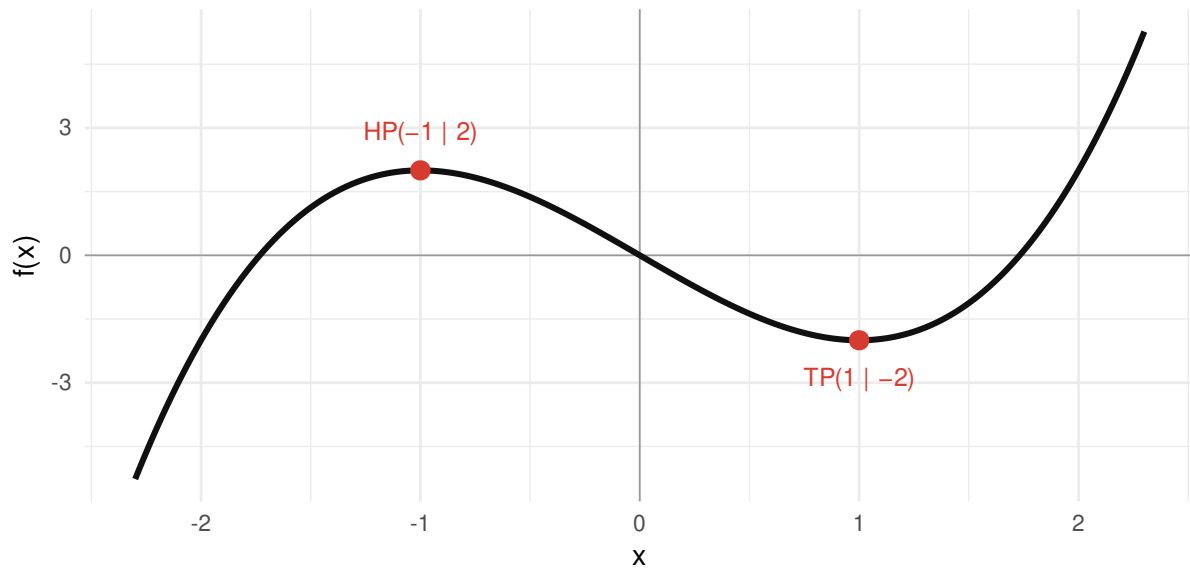


Abbildung 1: $f(x) = x^3 - 3x$ mit Hochpunkt HP(-1|2) und Tiefpunkt TP(1|-2)

Aufgaben

Aufgabe 1

Bestimme die Extrempunkte von

$$f(x) = x^2 - 6x + 5$$

Aufgabe 2

Bestimme alle Extrempunkte von $f(x) = x^3 - 3x$ mit dem Kriterium der zweiten Ableitung.

Aufgabe 3

Bestimme alle Extrempunkte von

$$f(x) = x^4 - 8x^2$$

Aufgabe 4

Untersuche $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ auf Extremstellen.

Warum versagt hier das Kriterium mit f'' , und was liefert stattdessen das Vorzeichenwechselkriterium?

Aufgabe 5

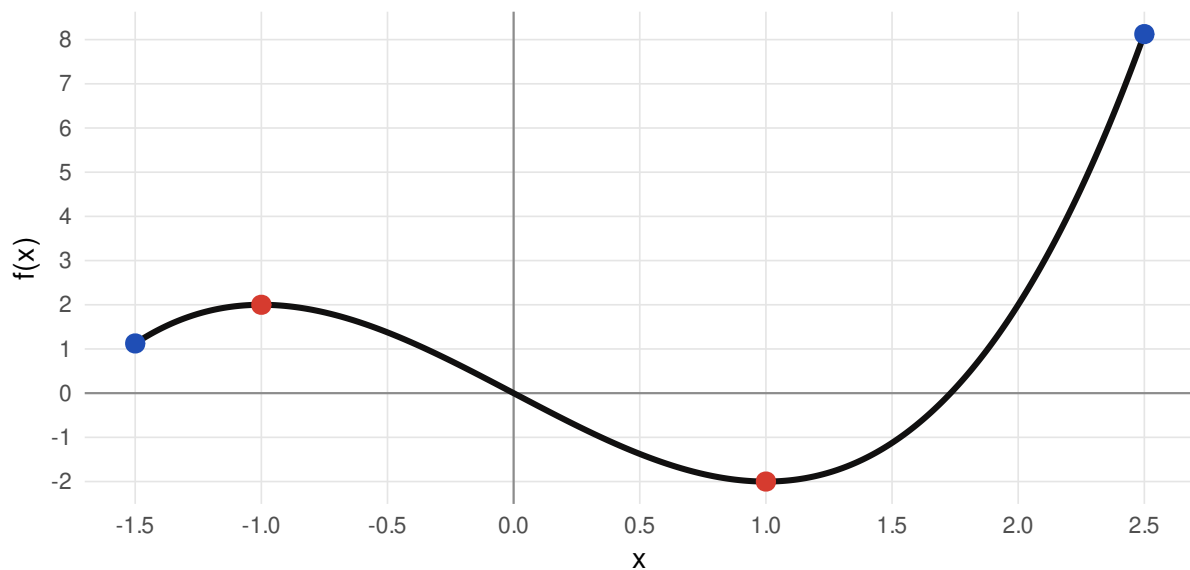
Bestimme die **globalen** Extrema von $f(x) = x^3 - 3x$ auf dem Intervall $[0, 3]$.

Aufgabe 6

Der Graph zeigt $f(x) = x^3 - 3x$ auf dem Intervall $[-1,5; 2,5]$. Die Randpunkte sind blau, die Punkte mit waagrechter Tangente rot markiert.

Lösungen

- Gib die **lokalen** Extrempunkte an.
- Gib das **globale** Maximum und das **globale** Minimum auf diesem Intervall an.
- Welcher der markierten Punkte ist ein lokales, aber kein globales Extremum?



Aufgabe 7

Bestimme alle Extrempunkte von

$$f(x) = x^{100} - 100x$$

Aufgabe 8

Bestimme alle Extrempunkte von

$$f(x) = 10^{-3}x^3 - 30x$$

Lösungen

Lösung 1

$$f'(x) = 2x - 6, \quad f''(x) = 2$$

Notwendige Bedingung: $2x - 6 = 0 \Rightarrow x_0 = 3$.

Hinreichend: $f''(3) = 2 > 0 \rightarrow$ lokales **Minimum**.

$$f(3) = 9 - 18 + 5 = -4 \quad \Rightarrow \quad TP(3 \mid -4)$$

Lösung 2

$$f'(x) = 3x^2 - 3, \quad f''(x) = 6x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$$

Stelle	$f''(x_0)$	Schluss	Punkt
$x_1 = -1$	$f''(-1) = -6 < 0$	lokales Maximum	$HP(-1 \mid 2)$
$x_2 = 1$	$f''(1) = 6 > 0$	lokales Minimum	$TP(1 \mid -2)$

Lösung 3

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x-2)(x+2), \quad f''(x) = 12x^2 - 16$$

Nullstellen von f' : $x = -2, x = 0, x = 2$.

Stelle	$f''(x_0)$	Schluss	Punkt
$x = -2$	$48 - 16 = 32 > 0$	lokales Minimum	$TP(-2 \mid -16)$
$x = 0$	$-16 < 0$	lokales Maximum	$HP(0 \mid 0)$
$x = 2$	$48 - 16 = 32 > 0$	lokales Minimum	$TP(2 \mid -16)$

Wegen $f(-x) = f(x)$ (nur gerade Exponenten) liegen die beiden Tiefpunkte spiegelbildlich zur y -Achse.

Lösung 4

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2, \quad f''(x) = 6x - 6$$

Notwendige Bedingung: $3(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x_0 = 1$.

Das Kriterium mit f'' versagt, weil $f''(1) = 6 \cdot 1 - 6 = 0$ ist — es liefert **keine Aussage**.

Vorzeichenwechselkriterium: $f'(x) = 3(x-1)^2 \geq 0$ für **alle** x , denn ein Quadrat ist nie negativ.
 Probewerte: $f'(0) = 3 > 0$ und $f'(2) = 3 > 0$ — **kein** Vorzeichenwechsel.

Also liegt bei $x_0 = 1$ **kein Extremum** vor, sondern ein Terrassenpunkt mit waagrechter Tangente:

$$f(1) = 1 - 3 + 3 = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Terrassenpunkt } (1 \mid 1)$$

f ist auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton steigend.

Lösung 5

Zuerst die inneren Kandidaten: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$. Im Intervall $[0, 3]$ liegt davon nur $x = 1$.

Dann alle Kandidatenwerte vergleichen — die beiden Ränder gehören dazu:

Stelle	Art	$f(x)$
$x = 0$	linker Rand	0
$x = 1$	$f'(1) = 0$, lokales Minimum	-2
$x = 3$	rechter Rand	$27 - 9 = 18$

globales Maximum: 18 bei $x = 3$ globales Minimum: -2 bei $x = 1$

Das globale Maximum liegt am **Rand**; dort ist $f'(3) = 24 \neq 0$. Wer nur $f' = 0$ untersucht, übersieht es.

Lösung 6

- a) Lokale Extrempunkte (rot, waagrechte Tangente): $HP(-1 \mid 2)$ und $TP(1 \mid -2)$.
- b) Randwerte (blau): $f(-1,5) = -3,375 + 4,5 = 1,125$ und $f(2,5) = 15,625 - 7,5 = 8,125$.

Vergleich aller vier Werte 1,125, 2, -2 und 8,125:

globales Maximum: 8,125 bei $x = 2,5$ globales Minimum: -2 bei $x = 1$

- c) Der **Hochpunkt** $HP(-1 \mid 2)$: er ist lokales Maximum, aber mit $f(-1) = 2 < 8,125$ kein globales. Der Tiefpunkt dagegen ist hier zugleich das globale Minimum.

Lösung 7

$$f'(x) = 100x^{99} - 100 = 100(x^{99} - 1), \quad f''(x) = 9900x^{98}$$

Notwendige Bedingung: $x^{99} = 1$. Der Exponent 99 ist **ungerade**, es gibt also genau eine reelle Lösung $x_0 = 1$.

Hinreichend: $f''(1) = 9900 > 0 \rightarrow$ lokales **Minimum**.

$$f(1) = 1 - 100 = -99 \implies TP(1 \mid -99)$$

Genau dasselbe Vorgehen wie in Aufgabe 1 — nur muss man beim Wurzelziehen auf die Parität des Exponenten achten.

Lösung 8

$$f'(x) = 3 \cdot 10^{-3} x^2 - 30, \quad f''(x) = 6 \cdot 10^{-3} x$$

Notwendige Bedingung:

$$3 \cdot 10^{-3} x^2 = 30 \implies x^2 = 10\,000 \implies x = \pm 100$$

Stelle	$f''(x_0)$	Schluss	Punkt
$x = -100$	$-0,6 < 0$	lokales Maximum	$HP(-100 \mid 2000)$
$x = 100$	$0,6 > 0$	lokales Minimum	$TP(100 \mid -2000)$

Nachrechnen: $f(100) = 10^{-3} \cdot 10^6 - 3000 = 1000 - 3000 = -2000$, und wegen der Punktsymmetrie $f(-100) = 2000$.