

Tangente, Normale und Steigungswinkel

Klasse 11

2026-08-19

Grundidee

Die **Tangente** an den Graphen von f im Punkt $P(x_0 \mid f(x_0))$ ist die Gerade durch P mit der Steigung $f'(x_0)$:

$$t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Vorgehen — immer dieselben drei Schritte:

1. $f(x_0)$ berechnen $\rightarrow$ Berührungspunkt
2. $f'(x)$ bestimmen und $f'(x_0)$ einsetzen $\rightarrow$ Steigung
3. beides in die Punkt-Steigungs-Form einsetzen und ausmultiplizieren

Die **Normale** steht in P senkrecht auf der Tangente. Für zwei zueinander senkrechte Geraden gilt $m_t \cdot m_n = -1$, also

$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0) \quad (f'(x_0) \neq 0)$$

Der **Steigungswinkel** α ist der Winkel zwischen Gerade und positiver x -Achse:

$$\tan \alpha = m = f'(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \arctan(f'(x_0))$$

m	0	1	2	-1
α	0°	45°	$\approx 63,4^\circ$	-45°

Aufgaben

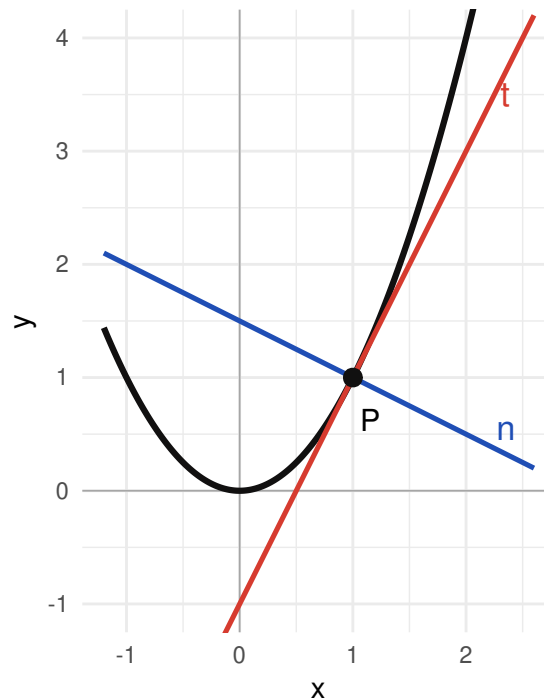


Abbildung 1: $f(x) = x^2$ mit Tangente $t(x) = 2x - 1$ und Normale $n(x) = -0,5x + 1,5$ im Punkt $P(1|1)$

Aufgaben

Aufgabe 1

Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen von $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 1$.

Aufgabe 2

Bestimme die Tangentengleichung an den Graphen von

$$f(x) = x^3 - x$$

an der Stelle $x_0 = 2$.

Aufgabe 3

Bestimme jeweils den Steigungswinkel der Tangente (auf eine Nachkommastelle gerundet):

- a) $f(x) = x^2$ bei $x_0 = 0,5$
- b) $f(x) = x^2$ bei $x_0 = 1$
- c) $f(x) = \frac{1}{3}x^3$ bei $x_0 = 2$

Aufgabe 4

Gegeben ist $f(x) = x^2$ und die Stelle $x_0 = 1$.

- a) Bestimme die Gleichung der Normalen.

Aufgaben

- b) Weise nach, dass Tangente und Normale tatsächlich senkrecht zueinander stehen.

Aufgabe 5

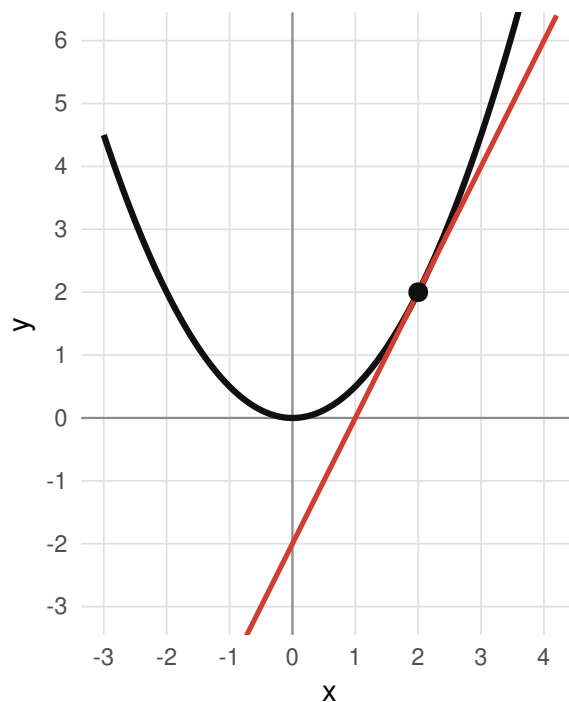
Gegeben ist $f(x) = x^2 - 4x$.

An welcher Stelle x_0 hat der Graph von f eine Tangente mit der Steigung 2? Gib auch die Tangentengleichung an.

Aufgabe 6

In der Zeichnung ist der Graph von $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ mit einer eingezeichneten Tangente zu sehen.

- Lies den Berührungspunkt und die Steigung der Tangente aus der Zeichnung ab.
- Gib damit $f'(x_0)$ und die Tangentengleichung an.
- Bestätige das Ergebnis durch Rechnung.



Aufgabe 7

Gegeben ist

$$f(x) = 10^6 x^2 - 10^6$$

Bestimme die Tangentengleichung an der Stelle $x_0 = 10^{-3}$.

Aufgabe 8

Gegeben ist $f(x) = x^{100}$ und die Stelle $x_0 = 1$.

- Bestimme die Tangentengleichung.
- Bestimme die Normalengleichung.
- Bestimme den Steigungswinkel der Tangente (auf zwei Nachkommastellen).

Lösungen

Lösung 1

1. $f(1) = 1 \rightarrow$ Berührungspunkt $P(1 \mid 1)$
2. $f'(x) = 2x$, also $f'(1) = 2$
- 3.

$$t(x) = 2 \cdot (x - 1) + 1 = 2x - 2 + 1 = 2x - 1$$

Lösung 2

1. $f(2) = 8 - 2 = 6 \rightarrow$ Berührungspunkt $P(2 \mid 6)$
2. $f'(x) = 3x^2 - 1$, also $f'(2) = 12 - 1 = 11$
- 3.

$$t(x) = 11(x - 2) + 6 = 11x - 22 + 6 = 11x - 16$$

Lösung 3

- a) $f'(x) = 2x$, $f'(0,5) = 1$:

$$\alpha = \arctan(1) = 45,0^\circ$$

- b) $f'(1) = 2$:

$$\alpha = \arctan(2) \approx 63,4^\circ$$

- c) $f'(x) = x^2$, $f'(2) = 4$:

$$\alpha = \arctan(4) \approx 76,0^\circ$$

Je größer die Steigung, desto näher liegt der Winkel bei 90° — erreichen kann er ihn nie.

Lösung 4

- a) Aus Aufgabe 1: $f(1) = 1$ und $f'(1) = 2$. Die Normalensteigung ist

$$m_n = -\frac{1}{f'(1)} = -\frac{1}{2}$$

$$n(x) = -\frac{1}{2}(x - 1) + 1 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

- b) Für die Steigungen gilt

$$m_t \cdot m_n = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

Das ist genau die Bedingung für zueinander senkrechte Geraden.

Lösung 5

Gesucht ist die Stelle mit $f'(x_0) = 2$. Mit $f'(x) = 2x - 4$:

$$2x_0 - 4 = 2 \implies 2x_0 = 6 \implies x_0 = 3$$

Berührungspunkt: $f(3) = 9 - 12 = -3$, also $P(3 \mid -3)$.

$$t(x) = 2(x - 3) + (-3) = 2x - 6 - 3 = 2x - 9$$

Lösung 6

a) Ablesen: Die Tangente berührt den Graphen im Punkt $P(2 \mid 2)$. Von dort aus geht man 1 nach rechts und 2 nach oben — die Steigung ist also $m = 2$. (Kontrolle: der y -Achsenabschnitt der Tangente liegt bei -2 .)

b)

$$f'(2) = 2, \quad t(x) = 2(x - 2) + 2 = 2x - 2$$

c) Rechnung: $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, also $f'(x) = x$ und damit $f'(2) = 2$ sowie $f(2) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$. Beides stimmt mit dem Abgelesenen überein.

Lösung 7

1.

$$f(10^{-3}) = 10^6 \cdot 10^{-6} - 10^6 = 1 - 10^6 = -999\,999$$

2. $f'(x) = 2 \cdot 10^6 x$, also

$$f'(10^{-3}) = 2 \cdot 10^6 \cdot 10^{-3} = 2000$$

3.

$$t(x) = 2000(x - 10^{-3}) - 999\,999 = 2000x - 2 - 999\,999 = 2000x - 1\,000\,001$$

Dieselben drei Schritte wie in Aufgabe 1.

Lösung 8

a) $f(1) = 1$ und $f'(x) = 100x^{99}$, also $f'(1) = 100$:

$$t(x) = 100(x - 1) + 1 = 100x - 99$$

b)

$$m_n = -\frac{1}{100}$$

$$n(x) = -\frac{1}{100}(x - 1) + 1 = -\frac{1}{100}x + \frac{101}{100}$$

c)

$$\alpha = \arctan(100) \approx 89,43^\circ$$

Die Tangente ist extrem steil, steht aber immer noch nicht senkrecht.