

Änderungsrate: vom Differenzenquotienten zur Ableitung

Klasse 11

2026-08-19

Grundidee

Die **durchschnittliche Änderungsrate** von f zwischen x_1 und x_2 ist der **Differenzenquotient**

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{bzw. mit Schrittweite } h : \quad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Geometrisch ist das die **Steigung der Sekante** durch die Punkte $P(x_0 \mid f(x_0))$ und $Q(x_0 + h \mid f(x_0 + h))$. In Sachaufgaben trägt er stets eine **Einheit** (z.B. $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\frac{^\circ\text{C}}{\text{h}}$).

Lässt man Q auf P zuwandern ($h \rightarrow 0$), so dreht sich die Sekante in die **Tangente**. Ihr Grenzwert heißt **Ableitung** von f an der Stelle x_0 :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Vorgehen beim Berechnen über den Grenzwert:

1. $f(x_0 + h)$ aufstellen und ausmultiplizieren
2. $f(x_0)$ abziehen — die konstanten Glieder heben sich weg
3. durch h kürzen (jetzt geht es, weil jeder Summand ein h enthält)
4. $h = 0$ einsetzen

Aufgaben

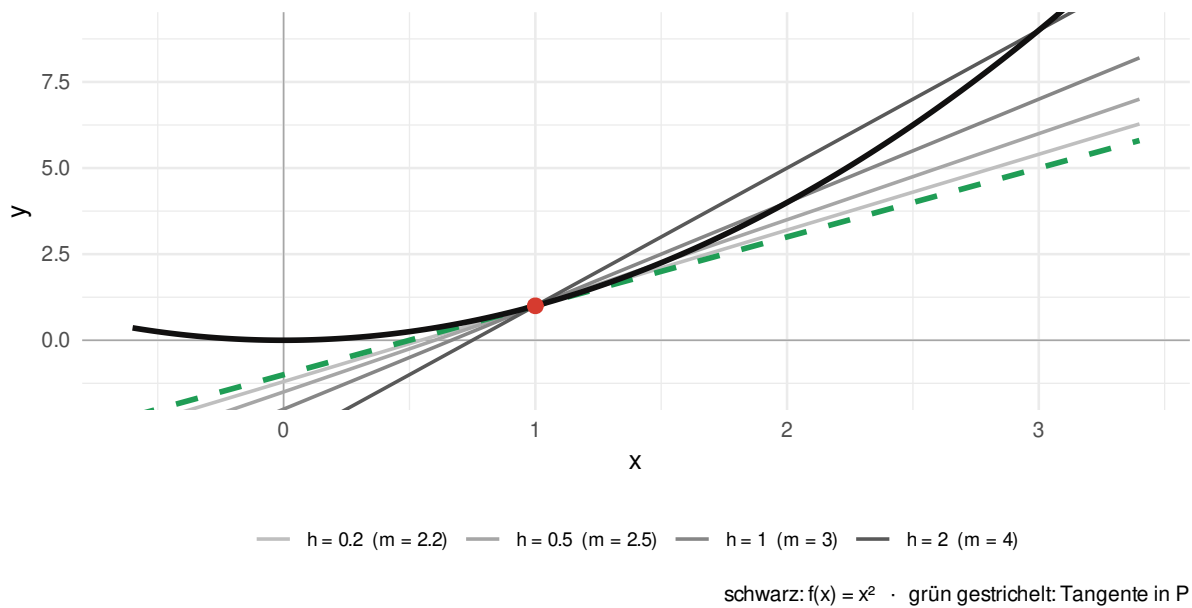


Abbildung 1: Sekanten durch $P(1|1)$ für $h = 2, 1, 0,5$ und $0,2$. Je kleiner h , desto näher liegt die Sekantensteigung bei der Tangentensteigung $f'(1) = 2$.

Aufgaben

Aufgabe 1

Gegeben ist $f(x) = x^2$.

- Berechne die durchschnittliche Änderungsrate von f zwischen $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$.
- Was bedeutet dieser Wert geometrisch?

Aufgabe 2

- Eine Pflanze ist nach 2 Wochen 8 cm hoch, nach 6 Wochen 20 cm. Bestimme die mittlere Wachstumsrate mit Einheit.
- Der Wasserstand eines Beckens (in Metern) nach t Stunden ist

$$h(t) = -0,5t^2 + 4t$$

Berechne die mittlere Änderungsrate zwischen $t = 1$ und $t = 3$ und gib die Einheit an.

Aufgabe 3

Gegeben ist $f(x) = x^2$ und die Stelle $x_0 = 2$.

- Stelle den Differenzenquotienten mit allgemeiner Schrittweite h auf und vereinfache ihn so weit wie möglich.
- Bestimme daraus $f'(2)$.

Aufgabe 4

Berechne $f'(1)$ über den Grenzwert des Differenzenquotienten für

$$f(x) = x^2 - 3x$$

Aufgabe 5

Gegeben ist $f(x) = x^3$.

Bestimme $f'(x_0)$ für eine **beliebige** Stelle x_0 über den Grenzwert des Differenzenquotienten.

Hinweis: $(x_0 + h)^3 = x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3$.

Aufgabe 6

Begründe jeweils, warum die Funktion an der angegebenen Stelle **nicht** differenzierbar ist:

- a) $f(x) = |x|$ bei $x_0 = 0$
- b) $g(x) = \frac{1}{x}$ bei $x_0 = 0$
- c) $h(x) = \sqrt[3]{x}$ bei $x_0 = 0$

Aufgabe 7

Gegeben ist $f(x) = 10^{-6} x^2$.

Berechne die durchschnittliche Änderungsrate zwischen $x_1 = 10^6$ und $x_2 = 2 \cdot 10^6$.

Aufgabe 8

Berechne $f'(0)$ über den Grenzwert des Differenzenquotienten für

$$f(x) = 10^9 x^2 - 10^{12} x + 10^{15}$$

Lösungen

Lösung 1

- a) $f(1) = 1, f(3) = 9$:

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{9 - 1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

- b) Der Wert 4 ist die **Steigung der Sekante** durch die Punkte $P(1 \mid 1)$ und $Q(3 \mid 9)$ auf dem Graphen von f .
-

Lösung 2

- a)

$$\frac{20 - 8}{6 - 2} = \frac{12}{4} = 3 \frac{\text{cm}}{\text{Woche}}$$

b) $h(1) = -0,5 + 4 = 3,5$ und $h(3) = -4,5 + 12 = 7,5$:

$$\frac{h(3) - h(1)}{3 - 1} = \frac{7,5 - 3,5}{2} = \frac{4}{2} = 2 \frac{\text{m}}{\text{h}}$$

Der Wasserstand stieg in diesem Zeitraum im Mittel um 2 Meter pro Stunde.

Lösung 3

a)

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2 - 4}{h} = \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = \frac{4h + h^2}{h} = 4 + h$$

Die konstanten Glieder 4 heben sich weg — deshalb lässt sich durch h kürzen.

b)

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} (4 + h) = 4$$

Lösung 4

$f(1) = 1 - 3 = -2$ und

$$f(1+h) = (1+h)^2 - 3(1+h) = 1 + 2h + h^2 - 3 - 3h = h^2 - h - 2$$

Damit:

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{h^2 - h - 2 - (-2)}{h} = \frac{h^2 - h}{h} = h - 1$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} (h - 1) = -1$$

Die Tangente in $P(1 \mid -2)$ fällt also mit der Steigung -1 .

Lösung 5

$$\frac{(x_0 + h)^3 - x_0^3}{h} = \frac{x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3 - x_0^3}{h} = \frac{3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3}{h}$$

Nach dem Kürzen durch h :

$$= 3x_0^2 + 3x_0h + h^2$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} (3x_0^2 + 3x_0h + h^2) = 3x_0^2$$

Also $f'(x) = 3x^2$ — das ist genau die Potenzregel für $n = 3$.

Lösung 6

- a) **Knickstelle.** Für $h > 0$ ist der Differenzenquotient $\frac{|h|-0}{h} = \frac{h}{h} = 1$, für $h < 0$ dagegen $\frac{-h}{h} = -1$. Links- und rechtsseitiger Grenzwert sind verschieden, der Grenzwert existiert nicht.
- b) **Polstelle.** g ist an der Stelle $x_0 = 0$ gar nicht definiert — schon die erste Voraussetzung fehlt.
- c) **Senkrechte Tangente.** Der Differenzenquotient $\frac{\sqrt[3]{h}}{h} = h^{-2/3}$ wächst für $h \rightarrow 0$ über alle Grenzen. Die Tangente steht senkrecht, eine endliche Steigung gibt es nicht.
-

Lösung 7

$$f(10^6) = 10^{-6} \cdot 10^{12} = 10^6, \quad f(2 \cdot 10^6) = 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{12} = 4 \cdot 10^6$$

$$\frac{4 \cdot 10^6 - 10^6}{2 \cdot 10^6 - 10^6} = \frac{3 \cdot 10^6}{10^6} = 3$$

Trotz der unhandlichen Zahlen genau dasselbe Vorgehen wie in Aufgabe 1 — und das Ergebnis ist eine glatte 3.

Lösung 8

$f(0) = 10^{15}$ und

$$f(h) = 10^9 h^2 - 10^{12} h + 10^{15}$$

Damit fällt der Riesensummand 10^{15} heraus:

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{10^9 h^2 - 10^{12} h}{h} = 10^9 h - 10^{12}$$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} (10^9 h - 10^{12}) = -10^{12}$$

Dieselben vier Schritte wie in Aufgabe 3: einsetzen, subtrahieren, kürzen, $h = 0$ setzen.