

Ableitungsregeln für ganzrationale Funktionen

Klasse 11

2026-08-19

Grundidee

Statt jedes Mal den Grenzwert des Differenzenquotienten zu bilden, genügen für Polynome drei Regeln:

Regel	Formel	Beispiel
Potenzregel	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(x^4)' = 4x^3$
Faktorregel	$(c \cdot f)' = c \cdot f'$	$(5x^3)' = 15x^2$
Summenregel	$(f + g)' = f' + g'$	gliedweise ableiten

Merkregel zur Potenzregel: Exponent als Faktor nach vorn ziehen, Exponent um 1 verringern. Insbesondere ist $(x)' = 1$ und $(c)' = 0$ — **konstante Glieder fallen weg**.

Vorgehen:

1. Term erst auf **Polynomform** bringen: Klammern ausmultiplizieren, Brüche kürzen
2. jeden Summanden einzeln mit Potenz- und Faktorregel ableiten
3. zusammenfassen

Hinweis

Schritt 1 ist nicht optional. Ein Produkt $g(x) \cdot h(x)$ darf **nicht** faktorweise abgeleitet werden — es gilt im Allgemeinen $(g \cdot h)' \neq g' \cdot h'$. Probe an $f(x) = x \cdot x = x^2$: richtig ist $f'(x) = 2x$, faktorweise käme fälschlich $1 \cdot 1 = 1$ heraus.

Aufgaben

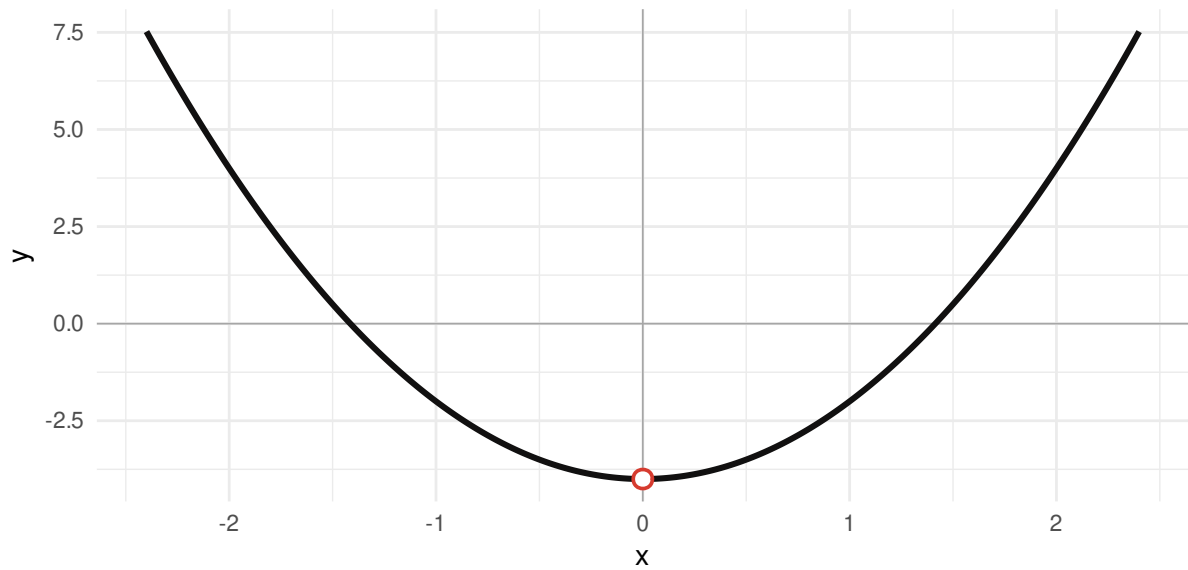


Abbildung 1: Warum man erst kürzt: $f(x) = (2x^3 - 4x)/x$ stimmt überall mit $2x^2 - 4$ überein, nur an der Stelle $x = 0$ fehlt der Punkt. Die Ableitung $f'(x) = 4x$ gilt für alle $x \neq 0$.

Aufgaben

Aufgabe 1

Bestimme $f'(x)$ für

$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 7$$

Aufgabe 2

Bestimme jeweils die Ableitung:

- a) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 1$
- b) $g(x) = -x^5 + 4x^3 - x + 9$
- c) $h(x) = 7$

Aufgabe 3

Bestimme $f'(x)$ für

$$f(x) = (x + 2)^2$$

Multipliziere zuerst aus.

Aufgabe 4

Bestimme $f'(x)$ für

$$f(x) = (2x - 1)(x + 3)$$

Lösungen

Überprüfe zusätzlich: Was käme heraus, wenn man (fälschlich) beide Faktoren einzeln ableiten und multiplizieren würde?

Aufgabe 5

Bestimme $f'(x)$ und $f''(x)$ für

$$f(x) = (x - 1)^3$$

Aufgabe 6

Gegeben ist

$$f(x) = \frac{2x^3 - 4x}{x}, \quad x \neq 0$$

- a) Vereinfache den Term.
- b) Bestimme $f'(x)$.
- c) Gib die Definitionsmenge von f und von f' an.

Aufgabe 7

Bestimme $f'(x)$ für

$$f(x) = 10^6 x^{50} - 10^{-6} x^{10} + 10^9$$

Aufgabe 8

Bestimme $f'(x)$ für

$$f(x) = \frac{x^{100} - x^{50}}{x^{49}}, \quad x \neq 0$$

Lösungen

Lösung 1

Gliedweise mit Potenz- und Faktorregel:

$$f'(x) = 3 \cdot 4x^3 - 2 \cdot 3x^2 + 5 = 12x^3 - 6x^2 + 5$$

Die Konstante -7 fällt weg.

Lösung 2

a)

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 4x^3 - 3 \cdot 2x = 2x^3 - 6x$$

Lösungen

b)

$$g'(x) = -5x^4 + 12x^2 - 1$$

c) h ist konstant, also

$$h'(x) = 0$$

Lösung 3

Erst ausmultiplizieren:

$$f(x) = (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

$$f'(x) = 2x + 4$$

Lösung 4

Ausmultiplizieren:

$$f(x) = (2x - 1)(x + 3) = 2x^2 + 6x - x - 3 = 2x^2 + 5x - 3$$

$$f'(x) = 4x + 5$$

Faktorweises Ableiten ergäbe $(2x - 1)' \cdot (x + 3)' = 2 \cdot 1 = 2$ — also eine Konstante statt der linearen Funktion $4x + 5$. Das ist **falsch**; ein Produkt darf nicht faktorweise abgeleitet werden.

Lösung 5

Erst ausmultiplizieren (binomische Formel für den Kubus):

$$f(x) = (x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

Lösung 6

a) Jeden Summanden einzeln durch x teilen:

$$f(x) = \frac{2x^3}{x} - \frac{4x}{x} = 2x^2 - 4 \quad (x \neq 0)$$

b)

$$f'(x) = 4x$$

c) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und ebenso $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Der gekürzte Term $2x^2 - 4$ wäre zwar auch bei $x = 0$ definiert — die ursprüngliche Funktion f ist es aber nicht, und daran ändert das Kürzen nichts.

Lösung 7

Die Größe der Koeffizienten spielt keine Rolle, es gilt dieselbe Rechnung wie in Aufgabe 1:

$$f'(x) = 10^6 \cdot 50 x^{49} - 10^{-6} \cdot 10 x^9 = 5 \cdot 10^7 x^{49} - 10^{-5} x^9$$

Die Konstante 10^9 fällt weg.

Lösung 8

Erst kürzen — jeder Summand des Zählers wird durch x^{49} geteilt (Potenzgesetz: Exponenten subtrahieren):

$$f(x) = \frac{x^{100}}{x^{49}} - \frac{x^{50}}{x^{49}} = x^{51} - x \quad (x \neq 0)$$

Jetzt gliedweise ableiten:

$$f'(x) = 51x^{50} - 1$$

Dasselbe Vorgehen wie in Aufgabe 6: erst vereinfachen, dann ableiten.