

# Die Ableitungsfunktion und höhere Ableitungen

Klasse 11

2026-08-19

## Grundidee

Berechnet man  $f'(x_0)$  nicht nur an einer, sondern an **jeder** Stelle, so entsteht eine neue Funktion — die **Ableitungsfunktion**  $f'$ .

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \dot{f}(x)$$

Der Graph von  $f'$  ist ein „Steigungsprotokoll“ von  $f$ . Man liest ihn so:

| Verhalten von $f$                     | Aussage über $f'$                          |
|---------------------------------------|--------------------------------------------|
| $f$ steigt auf $I$                    | $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$             |
| $f$ fällt auf $I$                     | $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$             |
| $f$ hat waagrechte Tangente bei $x_0$ | $f'(x_0) = 0$                              |
| $f$ hat lokales Extremum bei $x_0$    | $f'(x_0) = 0$ <b>mit</b> Vorzeichenwechsel |

Umgekehrt gilt: **Nullstellen von**  $f'$  liegen genau unter den waagrechten Tangenten von  $f$ .

Ist  $f'$  selbst wieder differenzierbar, kann man erneut ableiten:

$$f''(x) = (f')'(x), \quad f'''(x) = (f'')'(x), \quad \dots, \quad f^{(n)}(x)$$

## Aufgaben

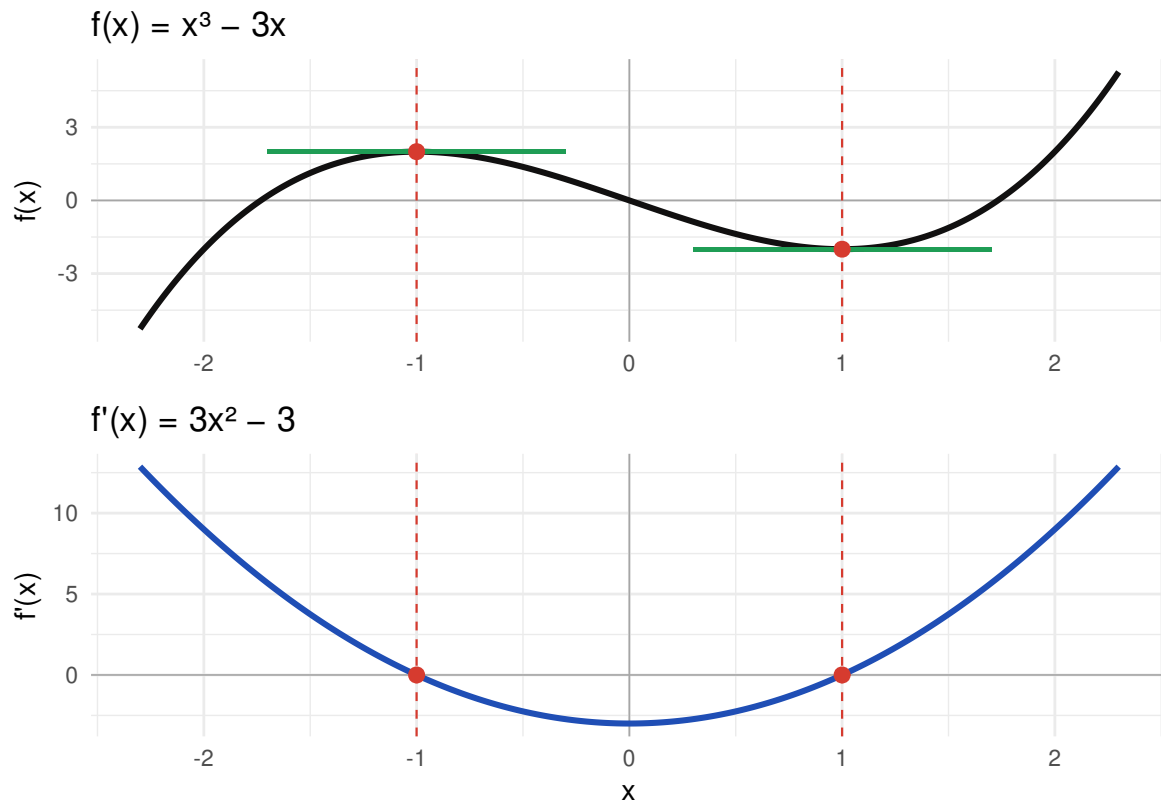


Abbildung 1: Oben  $f(x) = x^3 - 3x$ , unten die Ableitung  $f'(x) = 3x^2 - 3$ . Wo  $f$  eine waagrechte Tangente hat ( $x = \pm 1$ ), hat  $f'$  eine Nullstelle.

---

## Aufgaben

### Aufgabe 1

Gegeben ist  $f(x) = x^3 - 3x$ .

Bestimme  $f'(x)$ ,  $f''(x)$  und  $f'''(x)$ .

### Aufgabe 2

Gegeben ist  $f(x) = x^4 - 2x^2$ .

- Bestimme  $f'$ ,  $f''$ ,  $f'''$  und  $f^{(4)}$ .
- Wie lautet  $f^{(5)}$ ?

### Aufgabe 3

Der Graph von  $f(x) = x^3 - 3x$  ist in der Einführung abgebildet.

Gib jeweils an, für welche  $x$  gilt:

- $f'(x) > 0$
- $f'(x) < 0$
- $f'(x) = 0$

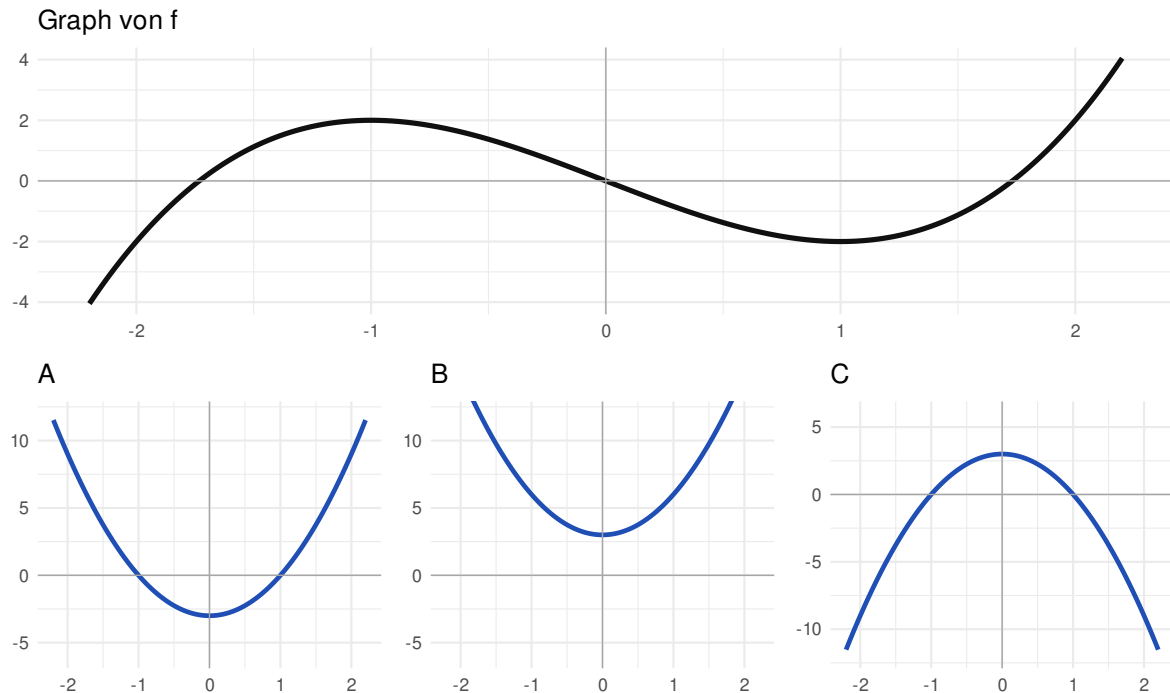
## Aufgaben

Begründe deine Antworten allein mit dem Verlauf des Graphen von  $f$  — ohne zu rechnen.

### Aufgabe 4

Unten ist links der Graph von  $f$  abgebildet. Welcher der drei Graphen **A**, **B** oder **C** ist der Graph von  $f'$ ?

Begründe, warum die beiden anderen ausscheiden.



### Aufgabe 5

Von einer Funktion  $f$  ist bekannt:

$$f'(x) = (x - 2)(x + 4)$$

- An welchen Stellen hat der Graph von  $f$  eine waagrechte Tangente?
- Auf welchen Intervallen steigt bzw. fällt  $f$ ?
- Bestimme  $f''(x)$ .

*Hinweis zu c): erst ausmultiplizieren.*

### Aufgabe 6

Gegeben ist  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 1$ .

- Bestimme  $f'$  und  $f''$ .
- Bestimme die Nullstellen von  $f'$ .
- Bestimme die Nullstelle von  $f''$ .

### Aufgabe 7

Gegeben ist  $f(x) = x^{100} - 50x^{98}$ .

Bestimme  $f'(x)$  und  $f''(x)$ .

### Aufgabe 8

Gegeben ist  $f(x) = x^5$ .

- a) Bestimme nacheinander  $f'$ ,  $f''$ ,  $f'''$ ,  $f^{(4)}$ ,  $f^{(5)}$  und  $f^{(6)}$ .
  - b) Begründe: Für  $g(x) = x^n$  ist  $g^{(n)}(x)$  eine Konstante und  $g^{(n+1)}(x) = 0$ .
  - c) Welchen Wert hat  $g^{(n)}$  für  $g(x) = x^{100}$ ? (Nur als Term angeben, nicht ausrechnen.)
- 

### Lösungen

#### Lösung 1

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f''(x) = 6x$$

$$f'''(x) = 6$$

---

#### Lösung 2

a)

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 4$$

$$f'''(x) = 24x$$

$$f^{(4)}(x) = 24$$

b)  $f^{(4)}$  ist konstant, also ist ihre Ableitung null:

$$f^{(5)}(x) = 0$$

---

#### Lösung 3

Man liest das Steigungsverhalten direkt am Graphen von  $f$  ab:

- a)  $f'(x) > 0$  für  $x < -1$  und  $x > 1$  — dort **steigt** der Graph.
  - b)  $f'(x) < 0$  für  $-1 < x < 1$  — dort **fällt** der Graph.
  - c)  $f'(x) = 0$  für  $x = -1$  und  $x = 1$  — dort hat der Graph eine **waagrechte Tangente** (Hoch- bzw. Tiefpunkt).
-

## Lösung 4

Richtig ist **A**.

- **B scheidet aus:** Der Graph von  $f$  hat bei  $x = -1$  und  $x = 1$  waagrechte Tangenten, also muss  $f'$  dort Nullstellen haben.  $B$  liegt aber vollständig oberhalb der  $x$ -Achse und hat gar keine Nullstelle.
  - **C scheidet aus:**  $C$  hat zwar die richtigen Nullstellen  $\pm 1$ , aber die falschen Vorzeichen. Zwischen  $-1$  und  $1$  **fällt**  $f$ , dort müsste  $f' < 0$  sein —  $C$  ist dort positiv. Außerhalb steigt  $f$ , dort müsste  $f' > 0$  sein —  $C$  ist dort negativ.
  - **A passt:** Nullstellen bei  $\pm 1$ , negativ dazwischen, positiv außerhalb. Tatsächlich ist  $f'(x) = 3x^2 - 3$ .
- 

## Lösung 5

a) Waagrechte Tangente heißt  $f'(x) = 0$ :

$$(x - 2)(x + 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2, \quad x_2 = -4$$

b)  $f'$  ist eine nach oben geöffnete Parabel mit den Nullstellen  $-4$  und  $2$ , also:

- $f'(x) > 0$  für  $x < -4$  und  $x > 2 \rightarrow f$  **steigt**
- $f'(x) < 0$  für  $-4 < x < 2 \rightarrow f$  **fällt**

c) Erst ausmultiplizieren, dann ableiten:

$$f'(x) = x^2 + 2x - 8 \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 2x + 2$$


---

## Lösung 6

a)

$$f'(x) = x^2 - x - 6, \quad f''(x) = 2x - 1$$

b)  $x^2 - x - 6 = 0$ . Mit der Mitternachtsformel:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -2$$

(Probe durch Faktorisieren:  $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$  )

c)

$$2x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} = 0,5$$


---

### Lösung 7

Gliedweise mit Potenz- und Faktorregel:

$$f'(x) = 100x^{99} - 50 \cdot 98 x^{97} = 100x^{99} - 4900x^{97}$$

$$f''(x) = 100 \cdot 99 x^{98} - 4900 \cdot 97 x^{96} = 9900x^{98} - 475300x^{96}$$

Genau dasselbe Vorgehen wie in Aufgabe 1 — nur die Exponenten sind groß.

---

### Lösung 8

a)

$$f'(x) = 5x^4, \quad f''(x) = 20x^3, \quad f'''(x) = 60x^2$$

$$f^{(4)}(x) = 120x, \quad f^{(5)}(x) = 120, \quad f^{(6)}(x) = 0$$

b) Bei jedem Ableiten sinkt der Exponent um 1 und der bisherige Exponent tritt als Faktor davor. Nach  $n$  Schritten ist der Exponent auf 0 gefallen, übrig bleibt das Produkt aller herausgezogenen Faktoren:

$$g^{(n)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$$

Das ist eine Konstante, und die Ableitung einer Konstanten ist null:  $g^{(n+1)}(x) = 0$ .

c)

$$g^{(100)}(x) = 100!$$

Zur Kontrolle mit a): für  $n = 5$  ergibt sich  $5! = 120$