

Vierfeldertafel und Baumdiagramm

Klasse 11

2026-08-19

Grundidee

Die **Vierfeldertafel** stellt alle vier Kombinationen zweier Ereignisse übersichtlich dar:

	B	$\bar{B}$	Σ
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
Σ	$P(B)$	$P(\bar{B})$	1

Ausfüllen: Bekannte Werte eintragen, fehlende durch Addition und Subtraktion ergänzen. Jede Zeile und jede Spalte muss auf ihren Rand summieren, alle vier inneren Felder zusammen auf 1 (bzw. auf n bei absoluten Häufigkeiten). Zwei geeignete Randwerte und ein inneres Feld genügen stets, um die ganze Tafel zu füllen.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten ablesen — entscheidend ist, wodurch geteilt wird:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\text{Zelle}}{\text{Zeilensumme}}, \quad P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\text{Zelle}}{\text{Spaltensumme}}$$

Umrechnung zwischen den Darstellungen:

Richtung	Vorgehen
Baum $\rightarrow$ Tafel	Pfadwahrscheinlichkeiten ausmultiplizieren, in die inneren Felder eintragen, Ränder summieren
Tafel $\rightarrow$ Baum	Randwahrscheinlichkeiten als erste Stufe; zweite Stufe als $\frac{\text{Zelle}}{\text{Rand}}$

Aufgaben

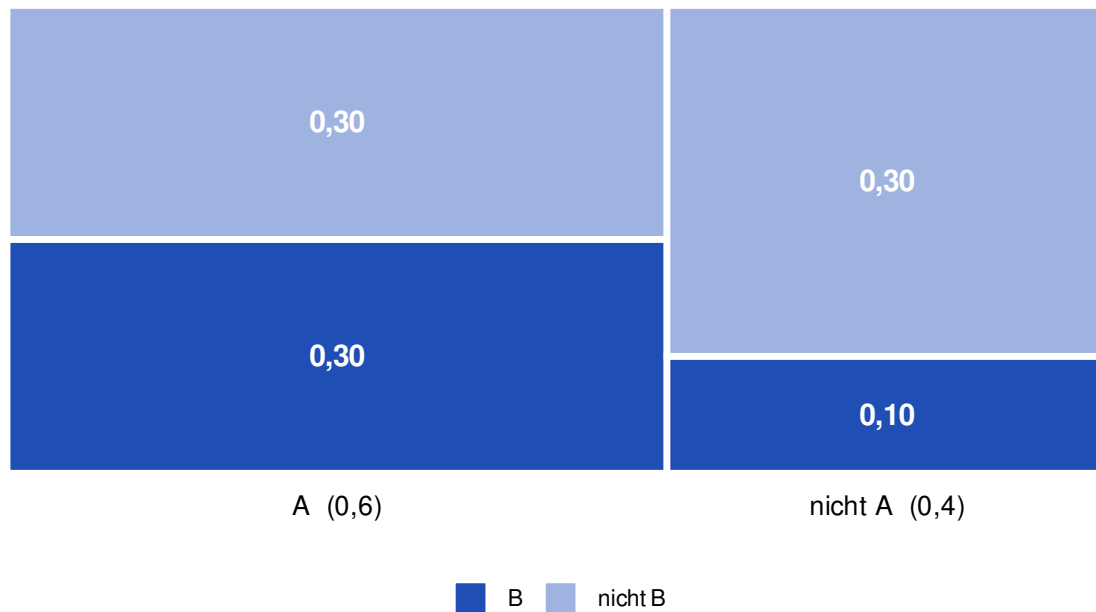


Abbildung 1: Die Vierfeldertafel als Flächenbild: Die Breite eines Streifens ist $P(A)$ bzw. $P(1-A)$, die Höhenaufteilung darin entspricht den bedingten Wahrscheinlichkeiten. Der Flächeninhalt jedes Rechtecks ist die Wahrscheinlichkeit des Schnittereignisses.

Aufgaben

Aufgabe 1

Gegeben sind $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,5$ und $P(A \cap B) = 0,2$.

- Fülle die vollständige Vierfeldertafel aus.
- Berechne $P_A(B)$ und $P_B(A)$.

Aufgabe 2

Unter 200 befragten Personen besitzen 120 ein Fahrrad (F). Insgesamt sind 70 der Befragten Studierende (S), und 45 Personen besitzen ein Fahrrad **und** sind Studierende.

- Erstelle die Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten.
- Berechne $P_F(S)$ und $P_S(F)$.

Aufgabe 3

Ein Baumdiagramm liefert $P(A) = 0,4$, $P_A(B) = 0,25$ und $P_{\bar{A}}(B) = 0,5$.

- Berechne die vier Pfadwahrscheinlichkeiten.
- Übertrage sie in eine Vierfeldertafel und ergänze die Ränder.
- Lies $P(B)$ ab.

Aufgaben

Aufgabe 4

Gegeben ist die Vierfeldertafel

	B	$\bar{B}$	Σ
A	0,15	0,25	
$\bar{A}$	0,35	0,25	
Σ			1

- Ergänze die Randwahrscheinlichkeiten.
- Bestimme alle vier Astwahrscheinlichkeiten der zweiten Stufe eines Baumdiagramms, das mit $A / \bar{A}$ beginnt.

Aufgabe 5

Lies aus dem Flächenbild in der Einführung ab:

- $P(A)$, $P(A \cap B)$ und $P(\bar{A} \cap B)$
- $P(B)$
- $P_A(B)$ und $P_{\bar{A}}(B)$ — und erkläre, an welchem Merkmal des Bildes man diese beiden Werte *unmittelbar* sieht.

Aufgabe 6

Von einer Vierfeldertafel ist nur bekannt:

$$P(A) = 0,45, \quad P(A \cap B) = 0,20, \quad P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,30$$

- Vervollständige die Tafel.
- Berechne $P(B)$ und $P_B(A)$.

Aufgabe 7

Auf der Erde leben $8 \cdot 10^9$ Menschen, davon $7 \cdot 10^9$ auf der Nordhalbkugel (N). Genau 2000 Menschen sammeln eine bestimmte seltene Briefmarke (S); 1800 von ihnen leben auf der Nordhalbkugel.

- Erstelle die Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten.
- Berechne $P_S(N)$ und $P_N(S)$.

Aufgabe 8

Gegeben sind $P(A) = 10^{-6}$, $P(B) = 0,5$ und $P(A \cap B) = 4 \cdot 10^{-7}$.

- Fülle die Vierfeldertafel aus.
 - Berechne $P_A(B)$ und $P_B(A)$.
-

Lösungen

Lösung 1

a) Aus $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,3 - 0,2 = 0,1$ usw.:

	B	$\bar{B}$	Σ
A	0,2	0,1	0,3
$\bar{A}$	0,3	0,4	0,7
Σ	0,5	0,5	1

b) $P_A(B) = \frac{0,2}{0,3} = \frac{2}{3} \approx 0,667$ (Zelle durch **Zeilensumme**)

$P_B(A) = \frac{0,2}{0,5} = 0,4$ (Zelle durch **Spaltensumme**)

Lösung 2

a) $F \cap S = 45$, also $F \cap \bar{S} = 120 - 45 = 75$ und $\bar{F} \cap S = 70 - 45 = 25$. Der Rest: $200 - 120 - 70 + 45 = 55$.

	S	$\bar{S}$	Σ
F	45	75	120
$\bar{F}$	25	55	80
Σ	70	130	200

b) $P_F(S) = \frac{45}{120} = 0,375$ und $P_S(F) = \frac{45}{70} \approx 0,643$

Lösung 3

a) Mit $P(\bar{A}) = 0,6$, $P_A(\bar{B}) = 0,75$ und $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,5$:

$$P(A \cap B) = 0,4 \cdot 0,25 = 0,1, \quad P(A \cap \bar{B}) = 0,4 \cdot 0,75 = 0,3$$

$$P(\bar{A} \cap B) = 0,6 \cdot 0,5 = 0,3, \quad P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,6 \cdot 0,5 = 0,3$$

b)

	B	$\bar{B}$	Σ
A	0,1	0,3	0,4
$\bar{A}$	0,3	0,3	0,6
Σ	0,4	0,6	1

c) $P(B) = 0,1 + 0,3 = 0,4$

Lösung 4

a) Zeilen- und Spaltensummen:

	B	$\bar{B}$	Σ
A	0,15	0,25	0,40
$\bar{A}$	0,35	0,25	0,60
Σ	0,50	0,50	1

b) Zelle durch Zeilensumme:

$$P_A(B) = \frac{0,15}{0,40} = 0,375, \quad P_A(\bar{B}) = \frac{0,25}{0,40} = 0,625$$

$$P_{\bar{A}}(B) = \frac{0,35}{0,60} \approx 0,583, \quad P_{\bar{A}}(\bar{B}) = \frac{0,25}{0,60} \approx 0,417$$

Probe: $0,375 + 0,625 = 1$ und $0,583 + 0,417 = 1$ — die Äste eines Knotens summieren stets auf 1.

Lösung 5

a) $P(A) = 0,6$ (Breite des linken Streifens), $P(A \cap B) = 0,30$, $P(\bar{A} \cap B) = 0,10$

b) $P(B) = 0,30 + 0,10 = 0,40$

c) $P_A(B) = \frac{0,30}{0,6} = 0,5$ und $P_{\bar{A}}(B) = \frac{0,10}{0,4} = 0,25$

Man sieht sie unmittelbar an der **Höhe der Trennlinie** innerhalb des jeweiligen Streifens: Im linken Streifen liegt sie auf halber Höhe (0,5), im rechten auf einem Viertel (0,25). Die bedingte Wahrscheinlichkeit ist der *Anteil an der Streifenhöhe*, nicht der Flächeninhalt.

Lösung 6

a) Der Reihe nach:

- $P(A \cap \bar{B}) = 0,45 - 0,20 = 0,25$
- $P(\bar{A}) = 1 - 0,45 = 0,55$
- $P(\bar{A} \cap B) = 0,55 - 0,30 = 0,25$

	B	$\bar{B}$	Σ
A	0,20	0,25	0,45
$\bar{A}$	0,25	0,30	0,55
Σ	0,45	0,55	1

b) $P(B) = 0,20 + 0,25 = 0,45$ und $P_B(A) = \frac{0,20}{0,45} = \frac{4}{9} \approx 0,444$

Lösung 7

- a) $S \cap N = 1800$, also $S \cap \bar{N} = 2000 - 1800 = 200$. Auf der Nordhalbkugel leben $7 \cdot 10^9$ Menschen, davon sind $7\,000\,000\,000 - 1800 = 6\,999\,998\,200$ keine Sammler. Auf der Südhalbkugel leben 10^9 Menschen, davon $999\,999\,800$ Nichtsammler.

	N	$\bar{N}$	Σ
S	1 800	200	2 000
$\bar{S}$	6 999 998 200	999 999 800	7 999 998 000
Σ	7 000 000 000	1 000 000 000	8 000 000 000

b) $P_S(N) = \frac{1800}{2000} = 0,9$

$$P_N(S) = \frac{1800}{7 \cdot 10^9} \approx 2,57 \cdot 10^{-7}$$

Dieselben zwei Divisionen wie in Aufgabe 2 — nur sind die Zeilensumme und die Spaltensumme extrem verschieden groß, weshalb die beiden bedingten Wahrscheinlichkeiten um sieben Zehnerpotenzen auseinanderliegen.

Lösung 8

- a) $P(A \cap \bar{B}) = 10^{-6} - 4 \cdot 10^{-7} = 6 \cdot 10^{-7}$, $P(\bar{A} \cap B) = 0,5 - 4 \cdot 10^{-7} = 0,4999996$, $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,5 - 6 \cdot 10^{-7} = 0,4999994$.

	B	$\bar{B}$	Σ
A	$4 \cdot 10^{-7}$	$6 \cdot 10^{-7}$	10^{-6}
$\bar{A}$	0,4999996	0,4999994	0,999999
Σ	0,5	0,5	1

b) $P_A(B) = \frac{4 \cdot 10^{-7}}{10^{-6}} = 0,4$ und $P_B(A) = \frac{4 \cdot 10^{-7}}{0,5} = 8 \cdot 10^{-7}$

Das Verfahren ist identisch zu Aufgabe 1; nur ist A so selten, dass die untere Zeile die Tafel vollständig dominiert.