

Stochastische Unabhängigkeit

Klasse 11

2026-08-19

Grundidee

Zwei Ereignisse heißen **stochastisch unabhängig**, wenn das Eintreten des einen die Wahrscheinlichkeit des anderen nicht verändert:

$$P_A(B) = P(B)$$

Zum Rechnen benutzt man fast immer die dazu gleichwertige **Produktbedingung**:

$$A, B \text{ unabhängig} \iff P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Sie hat zwei Vorteile: Sie ist **symmetrisch** in A und B , und sie funktioniert auch dann, wenn $P(A) = 0$ ist.

Vorgehen: $P(A \cap B)$ bestimmen, $P(A) \cdot P(B)$ ausrechnen, beide Zahlen vergleichen. Bei Gleichheit unabhängig, sonst abhängig.

Nicht verwechseln:

	unabhängig	unvereinbar
Bedingung	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$	$P(A \cap B) = 0$
Bedeutung	A verrät nichts über B	A und B schließen sich aus
Beispiel	zwei Münzwürfe	„gerade Zahl“ und „Augenzahl 5“

Zwei unvereinbare Ereignisse mit $P(A) > 0$ und $P(B) > 0$ sind **niemals** unabhängig: Tritt A ein, ist B unmöglich, also $P_A(B) = 0 \neq P(B)$.

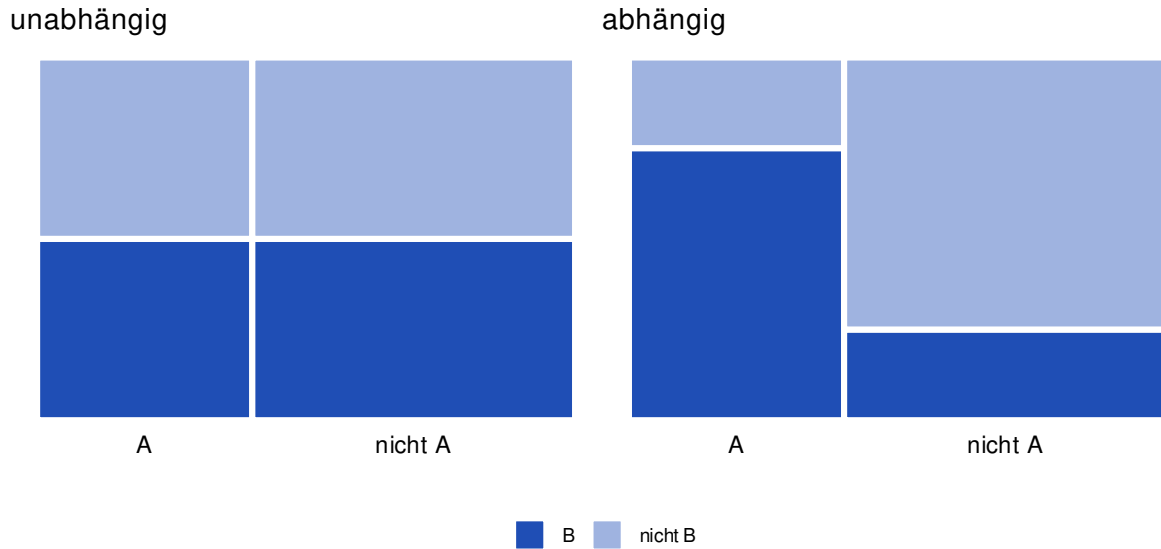


Abbildung 1: Unabhängigkeit im Flächenbild: Links liegt die Trennlinie in beiden Streifen auf derselben Höhe — die Aufteilung in B und nicht B ist in A genauso wie außerhalb. Rechts springt sie, also hängen die Ereignisse zusammen.

Aufgaben

Aufgabe 1

Gegeben sind $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,5$ und $P(A \cap B) = 0,2$.

Prüfe mit der Produktbedingung, ob A und B stochastisch unabhängig sind.

Aufgabe 2

Gegeben sind $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,6$ und $P(A \cap B) = 0,2$.

- Sind A und B unabhängig?
- Berechne $P_A(B)$ und vergleiche mit $P(B)$. Was bedeutet das inhaltlich?

Aufgabe 3

Eine faire Münze wird zweimal geworfen. Es sei A das Ereignis „erster Wurf Kopf“ und B das Ereignis „zweiter Wurf Kopf“.

Weise rechnerisch nach, dass A und B unabhängig sind.

Aufgabe 4

Eine Urne enthält 3 rote und 2 blaue Kugeln. Es wird zweimal **ohne Zurücklegen** gezogen. Es sei $A =$ „erste Kugel rot“ und $B =$ „zweite Kugel rot“.

- Bestimme $P(A)$, $P(B)$ und $P(A \cap B)$.
- Sind A und B unabhängig?

Aufgabe 5

In den beiden Flächenbildern sind die Wahrscheinlichkeiten der vier Schnittereignisse eingetragen.

Bild X

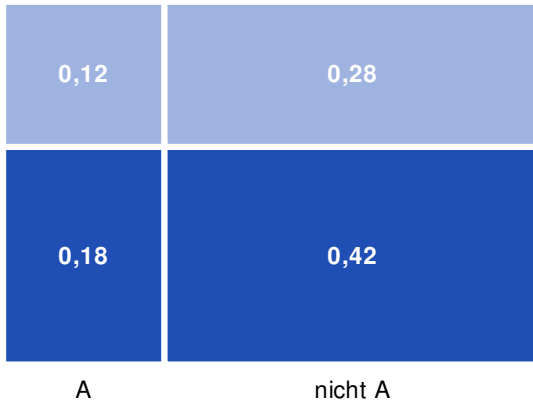
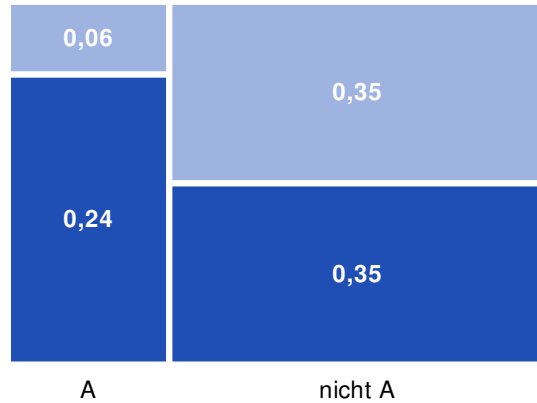


Bild Y



■ B ■ nicht B

- Bestimme für **Bild X** die Werte $P(A)$, $P(B)$ und $P(A \cap B)$ und entscheide über Unabhängigkeit.
- Führe dieselbe Prüfung für **Bild Y** durch.
- Woran hättest du das Ergebnis schon *ohne* Rechnung sehen können?

Aufgabe 6

Ein fairer Würfel wird einmal geworfen. Es sei A = „gerade Augenzahl“ und B = „Augenzahl 5“.

- Sind A und B unvereinbar?
- Sind A und B stochastisch unabhängig? Rechne nach.
- Begründe allgemein: Sind A und B unvereinbar mit $P(A) > 0$ und $P(B) > 0$, so können sie nicht unabhängig sein.

Aufgabe 7

In einem Teilchendetektor gilt für zwei Messereignisse

$$P(A) = 10^{-6}, \quad P(B) = 10^{-3}, \quad P(A \cap B) = 10^{-9}$$

Sind A und B stochastisch unabhängig?

Aufgabe 8

Ein Observatorium registriert ein sehr seltenes Teilchen (A) mit $P(A) = 10^{-6}$. Unabhängig davon schlägt ein Alarm (B) in 40 % aller Messintervalle an. Aus den Daten ergibt sich $P(A \cap B) = 9 \cdot 10^{-7}$.

- Sind A und B stochastisch unabhängig?
- Berechne $P_B(A)$ und vergleiche mit $P(A)$. Ist der Alarm ein brauchbarer Hinweis auf das Teilchen?

Lösungen

Lösung 1

$$P(A) \cdot P(B) = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2 = P(A \cap B) \quad \checkmark$$

A und B sind **stochastisch unabhängig**.

Lösung 2

a) $P(A) \cdot P(B) = 0,3 \cdot 0,6 = 0,18 \neq 0,2 = P(A \cap B)$

→ **abhängig**.

b) $P_A(B) = \frac{0,2}{0,3} = \frac{2}{3} \approx 0,667$, aber $P(B) = 0,6$.

Weiß man, dass A eingetreten ist, steigt die Wahrscheinlichkeit für B von 60 % auf rund 67 %. A liefert also **Information** über B — genau das schließt Unabhängigkeit aus.

Lösung 3

Die vier Ergebnisse KK, KZ, ZK, ZZ sind gleich wahrscheinlich mit je $\frac{1}{4}$.

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap B) = P(\text{KK}) = \frac{1}{4}$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(A \cap B) \quad \checkmark$$

A und B sind **unabhängig** — was der Anschauung entspricht: Die Münze hat kein Gedächtnis.

Lösung 4

a) $P(A) = \frac{3}{5}$.

Für $P(B)$ beide Pfade zur zweiten roten Kugel addieren:

$$P(B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} + \frac{6}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

b)

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25} = 0,36 \neq 0,3 = P(A \cap B)$$

→ **abhängig**. Beim Ziehen ohne Zurücklegen verändert der erste Zug die Urne — der zweite Zug „erinnert“ sich daran.

Bemerkenswert: $P(B) = P(A) = \frac{3}{5}$. Dass die Randwahrscheinlichkeiten gleich sind, hat mit Unabhängigkeit nichts zu tun.

Lösung 5

a) **Bild X:** $P(A) = 0,18 + 0,12 = 0,30$, $P(B) = 0,18 + 0,42 = 0,60$, $P(A \cap B) = 0,18$.

$$P(A) \cdot P(B) = 0,30 \cdot 0,60 = 0,18 = P(A \cap B) \quad \checkmark \Rightarrow \text{unabhängig}$$

b) **Bild Y:** $P(A) = 0,24 + 0,06 = 0,30$, $P(B) = 0,24 + 0,35 = 0,59$, $P(A \cap B) = 0,24$.

$$P(A) \cdot P(B) = 0,30 \cdot 0,59 = 0,177 \neq 0,24 \Rightarrow \text{abhängig}$$

c) An der **Höhe der Trennlinie**: In Bild X verläuft sie in beiden Streifen auf gleicher Höhe, die Aufteilung in B / nicht B ist also links wie rechts dieselbe. In Bild Y springt sie — innerhalb von A ist der B -Anteil deutlich größer als außerhalb.

Lösung 6

a) $A = \{2, 4, 6\}$ und $B = \{5\}$ haben kein gemeinsames Element, also $A \cap B = \emptyset$ und $P(A \cap B) = 0$. Sie sind **unvereinbar**.

b) $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{6}$:

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \neq 0 = P(A \cap B)$$

→ **abhängig**. Unvereinbarkeit ist also gerade *nicht* Unabhängigkeit.

c) Sind A und B unvereinbar, gilt $P(A \cap B) = 0$. Wären sie zusätzlich unabhängig, müsste

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B) = 0$$

gelten. Ein Produkt zweier Zahlen ist aber nur dann null, wenn mindestens ein Faktor null ist — Widerspruch zu $P(A) > 0$ und $P(B) > 0$.

Lösung 7

$$P(A) \cdot P(B) = 10^{-6} \cdot 10^{-3} = 10^{-9} = P(A \cap B) \quad \checkmark$$

A und B sind **unabhängig**. Dasselbe Vorgehen wie in Aufgabe 1 — beim Multiplizieren von Zehnerpotenzen werden die Exponenten addiert.

Lösung 8

a)

$$P(A) \cdot P(B) = 10^{-6} \cdot 0,4 = 4 \cdot 10^{-7} \neq 9 \cdot 10^{-7} = P(A \cap B)$$

→ **abhängig**. (Die Formulierung „unabhängig davon“ im Aufgabentext ist also durch die Daten widerlegt.)

b)

$$P_B(A) = \frac{9 \cdot 10^{-7}}{0,4} = 2,25 \cdot 10^{-6}$$

Gegenüber $P(A) = 10^{-6}$ ist das eine Steigerung auf mehr als das Doppelte. Als Hinweis taugt der Alarm damit trotzdem kaum: Auch bei Alarm liegt die Wahrscheinlichkeit für ein Teilchen nur bei $2,25 \cdot 10^{-6}$, also rund 0,000225 % — im Mittel führt erst etwa jeder 444 000-ste Alarm zu einem echten Teilchen.