

Bedingte Wahrscheinlichkeit berechnen

Klasse 11

2026-08-19

Grundidee

Die **bedingte Wahrscheinlichkeit** von B unter der Bedingung A ist

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{für } P(A) > 0$$

Nach $P(A \cap B)$ umgestellt ergibt das den **Multiplikationssatz**:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$$

Das ist genau die **Pfadregel**: Man multipliziert entlang eines Pfades. Denn an den Ästen eines Baumdiagramms stehen ab der zweiten Stufe *immer* bedingte Wahrscheinlichkeiten — sie gelten unter der Bedingung, dass man bereits im Knoten davor angekommen ist.

Vorgehen bei zwei Stufen:

1. Baumdiagramm zeichnen, erste Stufe mit $P(A)$ und $P(\bar{A})$ beschriften
2. Zweite Stufe mit den bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_A(B)$, $P_{\bar{A}}(B)$ beschriften
3. Pfadwahrscheinlichkeit = Produkt entlang des Pfades
4. Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses = Summe aller zugehörigen Pfade

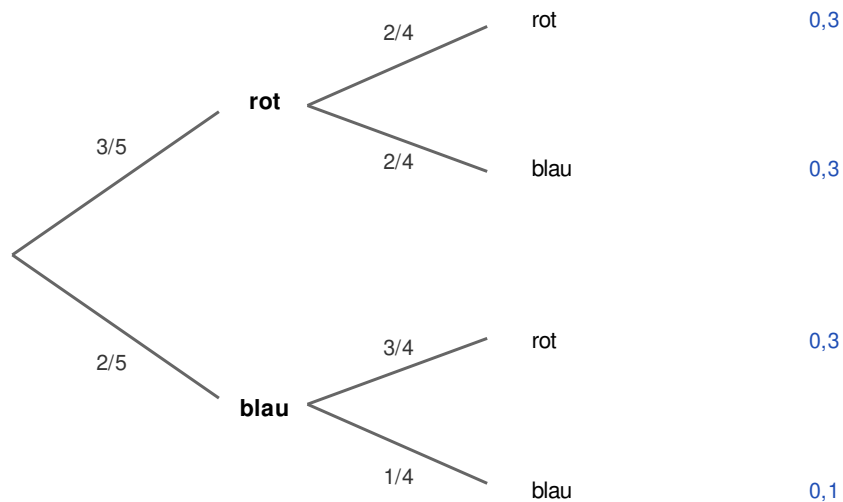


Abbildung 1: Urne mit 3 roten und 2 blauen Kugeln, zweimal ziehen ohne Zurücklegen. An den Ästen der zweiten Stufe stehen bedingte Wahrscheinlichkeiten — sie hängen davon ab, was zuerst gezogen wurde.

Aufgaben

Aufgabe 1

In einer Urne liegen 3 rote und 2 blaue Kugeln. Es wird zweimal **ohne Zurücklegen** gezogen.

- Bestimme $P(1. \text{ Kugel rot})$.
- Bestimme $P_{1, \text{ rot}}(2. \text{ rot})$.
- Berechne mit dem Multiplikationssatz $P(\text{beide Kugeln rot})$.

Aufgabe 2

Für zwei Ereignisse gilt $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ und $P(A \cap B) = 0,3$.

- Berechne $P_A(B)$.
- Berechne $P_B(A)$.
- Erkläre in einem Satz, warum die beiden Werte verschieden sind, obwohl im Zähler dasselbe steht.

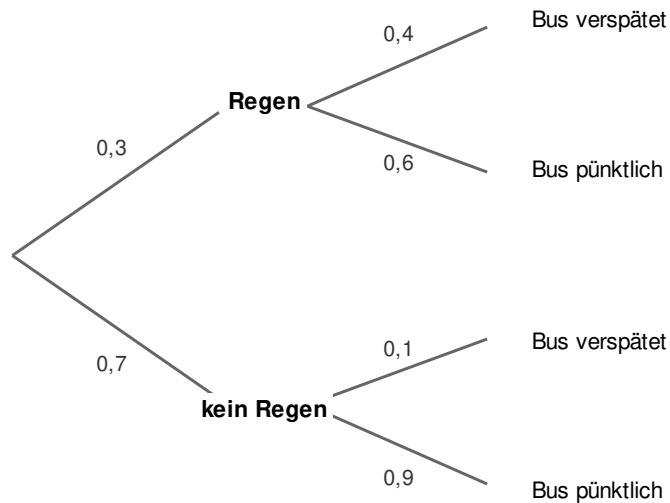
Aufgabe 3

Ein Betrieb bezieht Bauteile von zwei Zulieferern. Zulieferer Z_1 liefert 70 % aller Teile, Z_2 die übrigen 30 %. Von den Teilen aus Z_1 sind 2 % defekt, von denen aus Z_2 sind 6 % defekt.

- Zeichne das Baumdiagramm.
- Berechne $P(Z_1 \cap \text{defekt})$.
- Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewähltes Teil defekt ist.

Aufgabe 4

Das folgende Baumdiagramm beschreibt den Zusammenhang zwischen Wetter und Pünktlichkeit eines Busses.



- Lies $P_{\text{Regen}}(\text{verspätet})$ direkt aus der Zeichnung ab.
- Berechne die vier Pfadwahrscheinlichkeiten und prüfe, ob ihre Summe 1 ergibt.
- Berechne $P(\text{Bus verspätet})$.

Aufgabe 5

Eine Urne enthält 5 rote und 3 blaue Kugeln. Es wird **dreimal ohne Zurücklegen** gezogen.

- Berechne $P(\text{alle drei Kugeln rot})$.
- Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine blaue Kugel dabei ist.

Aufgabe 6

Von einem zweistufigen Zufallsexperiment ist bekannt:

$$P(A) = 0,6, \quad P(A \cap B) = 0,24, \quad P(B) = 0,45$$

- Berechne die Astwahrscheinlichkeit $P_A(B)$.
- Berechne die Astwahrscheinlichkeit $P_{\bar{A}}(B)$.
- Bestätige durch Nachrechnen, dass sich mit deinen Werten wieder $P(B) = 0,45$ ergibt.

Aufgabe 7

Eine Lotterie gibt 1 000 000 Lose aus, davon sind genau 10 Gewinnlose. Eine Person kauft zwei verschiedene Lose (also ohne Zurücklegen).

- Bestimme $P(\text{1. Los ist Gewinnlos})$.
- Bestimme $P_{\text{1. Gewinn}}(\text{2. Gewinn})$.
- Berechne $P(\text{beide Lose sind Gewinnlose})$.

Aufgabe 8

Ein Marsrover fährt durch eine Region, in der mit Wahrscheinlichkeit 10^{-6} ein Staubsturm auftritt. Bei Staubsturm fällt ein bestimmter Sensor mit Wahrscheinlichkeit 0,9 aus, ohne Staubsturm nur mit Wahrscheinlichkeit 10^{-9} .

- a) Berechne $P(\text{Staubsturm} \cap \text{Sensorausfall})$.
 - b) Berechne die Wahrscheinlichkeit für einen Sensorausfall insgesamt.
-

Lösungen

Lösung 1

- a) Von 5 Kugeln sind 3 rot:

$$P(1. \text{ rot}) = \frac{3}{5} = 0,6$$

- b) Wurde bereits eine rote Kugel entnommen, liegen noch 4 Kugeln in der Urne, davon 2 rote:

$$P_{1. \text{ rot}}(2. \text{ rot}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

- c) Multiplikationssatz:

$$P(\text{beide rot}) = P(1. \text{ rot}) \cdot P_{1. \text{ rot}}(2. \text{ rot}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10} = 0,3$$

Lösung 2

- a) $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,3}{0,5} = 0,6$

- b) $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,3}{0,4} = 0,75$

- c) Der Zähler ist derselbe, aber die **Grundgesamtheit** ist verschieden: Bei $P_A(B)$ rechnet man nur innerhalb von A (Anteil 0,5), bei $P_B(A)$ nur innerhalb von B (Anteil 0,4). Je kleiner die Bedingungsmenge, desto größer der Anteil.
-

Lösung 3

- a) Erste Stufe: Z_1 mit 0,7, Z_2 mit 0,3. Zweite Stufe: defekt mit 0,02 bzw. 0,06.
- b) Multiplikationssatz:

$$P(Z_1 \cap \text{defekt}) = 0,7 \cdot 0,02 = 0,014$$

c) Beide Pfade zu „defekt“ addieren:

$$P(\text{defekt}) = 0,7 \cdot 0,02 + 0,3 \cdot 0,06 = 0,014 + 0,018 = 0,032$$

Also sind 3,2 % aller Teile defekt.

Lösung 4

a) Direkt am oberen Ast der zweiten Stufe abzulesen:

$$P_{\text{Regen}}(\text{verspätet}) = 0,4$$

b) Pfadregel — jeweils entlang des Pfades multiplizieren:

Pfad	Rechnung	Wahrscheinlichkeit
Regen, verspätet	$0,3 \cdot 0,4$	0,12
Regen, pünktlich	$0,3 \cdot 0,6$	0,18
kein Regen, verspätet	$0,7 \cdot 0,1$	0,07
kein Regen, pünktlich	$0,7 \cdot 0,9$	0,63

Summe: $0,12 + 0,18 + 0,07 + 0,63 = 1$

c) Summe der beiden Pfade zu „verspätet“:

$$P(\text{verspätet}) = 0,12 + 0,07 = 0,19$$

Lösung 5

a) Nach jedem Zug sinken sowohl die Anzahl der roten Kugeln als auch die Gesamtzahl um 1:

$$P(3x \text{ rot}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{60}{336} = \frac{5}{28} \approx 0,179$$

b) Das Gegenereignis von „mindestens eine blau“ ist genau „alle drei rot“:

$$P(\text{mind. eine blau}) = 1 - \frac{5}{28} = \frac{23}{28} \approx 0,821$$

Lösung 6

Lösungen

a) $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,24}{0,6} = 0,4$

- b) Zuerst $P(\bar{A} \cap B)$ bestimmen. Das Ereignis B setzt sich aus den beiden Pfaden über A und über $\bar{A}$ zusammen:

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,45 - 0,24 = 0,21$$

Mit $P(\bar{A}) = 1 - 0,6 = 0,4$:

$$P_{\bar{A}}(B) = \frac{0,21}{0,4} = 0,525$$

- c) Probe über beide Pfade:

$$0,6 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,525 = 0,24 + 0,21 = 0,45 \quad \checkmark$$

Lösung 7

a) $P(1. \text{ Gewinn}) = \frac{10}{1\,000\,000} = 10^{-5}$

- b) Ist das erste Los ein Gewinnlos, verbleiben 9 Gewinnlose unter 999 999 Losen:

$$P_{1. \text{ Gewinn}}(2. \text{ Gewinn}) = \frac{9}{999\,999} \approx 9,0 \cdot 10^{-6}$$

- c) Multiplikationssatz:

$$P(\text{beide Gewinn}) = \frac{10}{1\,000\,000} \cdot \frac{9}{999\,999} = \frac{1}{11\,111\,100\,000} \approx 9,0 \cdot 10^{-11}$$

Exakt dasselbe Vorgehen wie in Aufgabe 1 — die Urne ist nur sehr viel größer.

Lösung 8

- a) Multiplikationssatz:

$$P(\text{Sturm} \cap \text{Ausfall}) = 10^{-6} \cdot 0,9 = 9 \cdot 10^{-7}$$

- b) Beide Pfade zu „Ausfall“ addieren, mit $P(\text{kein Sturm}) = 1 - 10^{-6} = 0,999999$:

$$P(\text{Ausfall}) = 10^{-6} \cdot 0,9 + 0,999999 \cdot 10^{-9}$$

$$= 9 \cdot 10^{-7} + 9,99999 \cdot 10^{-10} \approx 9,01 \cdot 10^{-7}$$

Der zweite Pfad trägt kaum bei: Fast jeder Sensorausfall geschieht während eines Staubsturms, obwohl Staubstürme extrem selten sind. Das Vorgehen ist identisch zu Aufgabe 3.