

Polstellen und hebbare Definitionslücken

Klasse 11

2026-08-19

Grundidee

An einer Definitionslücke x_0 (also $q(x_0) = 0$) entscheidet der **Zähler**, was passiert:

Fall	Bedingung	Verhalten
Polstelle	$q(x_0) = 0, p(x_0) \neq 0$	$ f(x) \rightarrow \infty$, senkrechte Asymptote $x = x_0$
Hebbare Lücke	$q(x_0) = 0$ und $p(x_0) = 0$	gemeinsamen Faktor kürzen, Grenzwert existiert

 Gemeinsame Nullstelle heißt noch nicht „hebbar“

Nach dem Kürzen muss man erneut hinsehen: Steckt der Faktor $(x - x_0)$ im Nenner **öfter** als im Zähler, bleibt trotz Kürzen eine Polstelle übrig.

Vorzeichenwechsel. An einer Polstelle prüft man mit einer **Vorzeichentabelle**, ob der Graph beidseitig in dieselbe Richtung läuft oder nicht. Dazu betrachtet man Zähler und Nenner getrennt knapp links und knapp rechts von x_0 :

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2}, \quad x_0 = 2$$

	$x \rightarrow 2^-$	$x \rightarrow 2^+$
$x+1$	$3 > 0$	$3 > 0$
$x-2$	$\rightarrow 0^-$	$\rightarrow 0^+$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

$\rightarrow$ **mit** Vorzeichenwechsel. Bei $f(x) = \frac{1}{x^2}$ dagegen ist der Nenner beidseitig positiv $\rightarrow$ **ohne** Vorzeichenwechsel.

Aufgaben

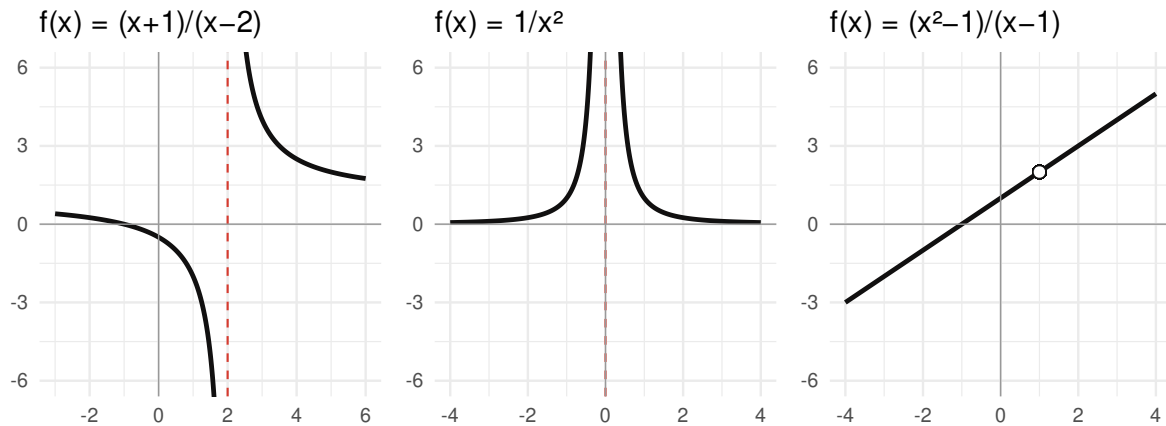


Abbildung 1: Links: Polstelle mit Vorzeichenwechsel. Mitte: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel. Rechts: hebbare Lücke (offener Punkt) — kein Ast läuft ins Unendliche.

Aufgaben

Aufgabe 1

Gegeben ist $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$.

- Bestimme die Definitionslücke und weise nach, dass es sich um eine Polstelle handelt.
- Erstelle die Vorzeichentabelle und gib das Verhalten für $x \rightarrow 1^-$ und $x \rightarrow 1^+$ an.

Aufgabe 2

Untersuche jeweils, ob an der Definitionslücke eine Polstelle mit oder ohne Vorzeichenwechsel vorliegt:

- $f(x) = \frac{2}{x^2}$
- $g(x) = \frac{5}{x-4}$

Aufgabe 3

Gegeben ist

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - x}$$

Bestimme D und untersuche **jede** Definitionslücke: Polstelle oder hebbare Lücke? Gib bei hebbaren Lücken den Grenzwert an.

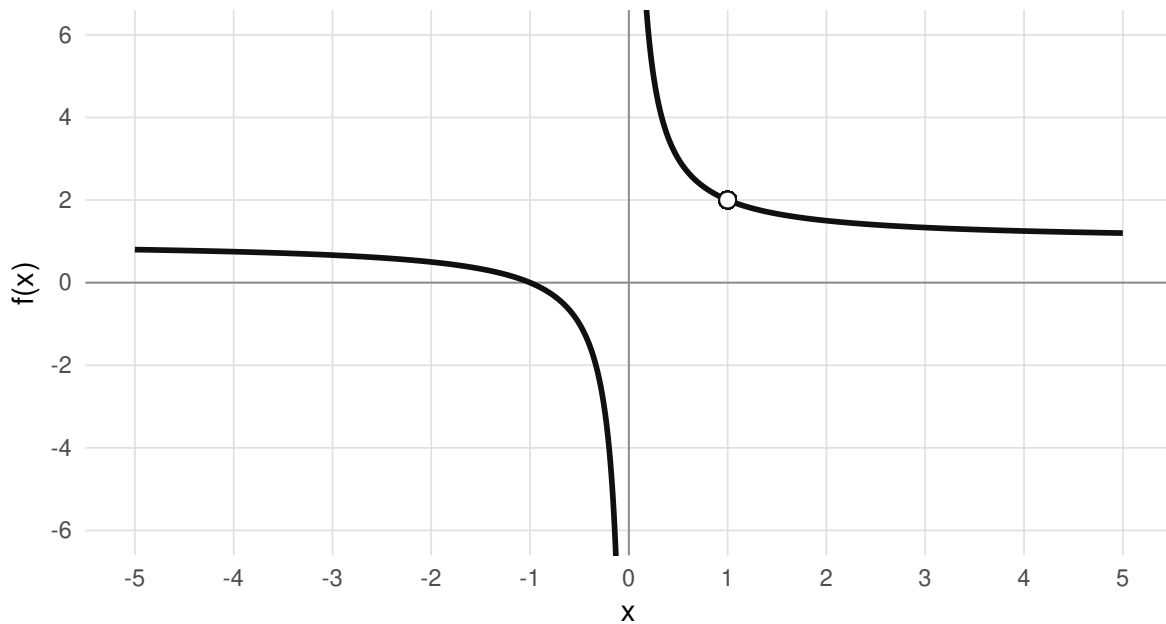
Aufgabe 4

Der abgebildete Graph gehört zu einer gebrochen-rationalen Funktion f .

- An welcher Stelle liegt eine Polstelle, an welcher eine hebbare Lücke? Woran erkennst du das im Bild?

Aufgaben

- b) Liegt an der Polstelle ein Vorzeichenwechsel vor?
c) Welchen Wert müsste man an der hebbaren Lücke ergänzen, damit f dort stetig wird?



Aufgabe 5

Gegeben ist

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4}$$

Zähler und Nenner haben bei $x = 2$ beide eine Nullstelle. Untersuche, ob dort eine hebbare Lücke vorliegt.

Aufgabe 6

Gegeben ist

$$f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - x - 6}$$

Bestimme alle Polstellen und untersuche jede mit einer Vorzeichentabelle auf Vorzeichenwechsel.

Aufgabe 7

Untersuche die Definitionslücke von

$$f(x) = \frac{x^2 - 10^{12}}{x - 10^6}$$

Polstelle oder hebbare Lücke? Gib gegebenenfalls den Grenzwert an.

Aufgabe 8

Untersuche die Definitionslücke von

$$f(x) = \frac{x + 10^{100}}{x^2}$$

auf Polstelle bzw. Vorzeichenwechsel.

Lösungen

Lösung 1

a) Nenner: $x - 1 = 0 \Rightarrow x_0 = 1$, also $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Zähler an dieser Stelle: $p(1) = 1 + 3 = 4 \neq 0 \rightarrow$ **Polstelle** (keine hebbare Lücke).

b) Vorzeichentabelle:

	$x \rightarrow 1^-$	$x \rightarrow 1^+$
$x + 3$	$4 > 0$	$4 > 0$
$x - 1$	$\rightarrow 0^-$	$\rightarrow 0^+$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

Es liegt ein **Vorzeichenwechsel** vor; $x = 1$ ist senkrechte Asymptote.

Lösung 2

a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zähler $2 \neq 0 \rightarrow$ Polstelle.

Der Nenner x^2 ist links **und** rechts von 0 positiv:

	$x \rightarrow 0^-$	$x \rightarrow 0^+$
2	> 0	> 0
x^2	$\rightarrow 0^+$	$\rightarrow 0^+$
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$

$\rightarrow$ Polstelle **ohne** Vorzeichenwechsel.

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$. Zähler $5 \neq 0 \rightarrow$ Polstelle.

$x - 4$ wechselt bei 4 das Vorzeichen ($\rightarrow 0^-$ bzw. $\rightarrow 0^+$), der Zähler bleibt positiv:

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} g(x) = +\infty$$

$\rightarrow$ Polstelle **mit** Vorzeichenwechsel.

Lösung 3

Faktorisieren:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)}$$

Nenner-Nullstellen: $x = 0$ und $x = 1$, also $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Stelle $x = 1$: Zähler und Nenner werden beide null. Kürzen von $(x - 1)$:

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \quad (x \neq 1, x \neq 0)$$

Nach dem Kürzen ist der Nenner bei $x = 1$ gleich $1 \neq 0 \rightarrow$ **hebbare Lücke** mit

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1+1}{1} = 2$$

Stelle $x = 0$: Im gekürzten Term ist der Zähler $0 + 1 = 1 \neq 0$, der Nenner null $\rightarrow$ **Polstelle**.

Vorzeichen: Zähler $\rightarrow 1 > 0$, Nenner $x \rightarrow 0^\pm \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, also **mit** Vorzeichenwechsel.

Lösung 4

- a) Bei $x = 0$ liegt die **Polstelle**: die beiden Äste laufen dort ins Unendliche, der Graph nähert sich der senkrechten Geraden $x = 0$ an.

Bei $x = 1$ liegt die **hebbare Lücke**: der Graph läuft dort ganz normal weiter, es fehlt nur ein einzelner Punkt (offener Kreis). Nichts strebt gegen unendlich.

- b) Ja. Links von 0 fällt der Graph nach $-\infty$, rechts von 0 kommt er von $+\infty$ — die Vorzeichen sind verschieden, also **Vorzeichenwechsel**.
- c) Der Graph strebt bei $x = 1$ gegen den Wert 2 (abzulesen an der Höhe des offenen Kreises). Man ergänzt

$$f(1) := 2$$

Lösung 5

Beide faktorisieren:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2}$$

Der Faktor $(x - 2)$ kommt im Zähler **einmal**, im Nenner **zweimal** vor. Nach dem Kürzen bleibt einer im Nenner stehen:

$$f(x) = \frac{x+2}{x-2} \quad (x \neq 2)$$

Jetzt gilt an der Stelle $x = 2$: Zähler = 4 $\neq$ 0, Nenner = 0.

→ Es liegt **keine hebbare Lücke**, sondern eine **Polstelle** vor.

Vorzeichentabelle:

	$x \rightarrow 2^-$	$x \rightarrow 2^+$
$x + 2$	$4 > 0$	$4 > 0$
$x - 2$	$\rightarrow 0^-$	$\rightarrow 0^+$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

Polstelle **mit** Vorzeichenwechsel.

Lösung 6

Nenner faktorisieren: $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$$

Zähler bei $x = -2$: $-3 \neq 0$; bei $x = 3$: $2 \neq 0 \rightarrow$ beides **Polstellen**.

Bei $x_0 = -2$:

	$x \rightarrow -2^-$	$x \rightarrow -2^+$
$x - 1$	$-3 < 0$	$-3 < 0$
$x + 2$	$\rightarrow 0^-$	$\rightarrow 0^+$
$x - 3$	$-5 < 0$	$-5 < 0$
Nenner	$\rightarrow 0^+$	$\rightarrow 0^-$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

→ Vorzeichenwechsel

Bei $x_0 = 3$:

	$x \rightarrow 3^-$	$x \rightarrow 3^+$
$x - 1$	$2 > 0$	$2 > 0$
$x - 3$	$\rightarrow 0^-$	$\rightarrow 0^+$
$x + 2$	$5 > 0$	$5 > 0$
Nenner	$\rightarrow 0^-$	$\rightarrow 0^+$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

→ Vorzeichenwechsel

An beiden Polstellen wechselt das Vorzeichen.

Lösung 7

Nenner: $x - 10^6 = 0 \Rightarrow x_0 = 10^6$, also $D = \mathbb{R} \setminus \{10^6\}$.

Der Zähler ist eine dritte binomische Formel:

$$x^2 - 10^{12} = x^2 - (10^6)^2 = (x - 10^6)(x + 10^6)$$

Auch der Zähler wird bei x_0 null $\rightarrow$ kürzen:

$$f(x) = \frac{(x - 10^6)(x + 10^6)}{x - 10^6} = x + 10^6 \quad (x \neq 10^6)$$

Der gekürzte Term ist ein Polynom, der Grenzwert existiert $\rightarrow$ **hebbare Lücke** mit

$$\lim_{x \rightarrow 10^6} f(x) = 10^6 + 10^6 = 2 \cdot 10^6$$

Dasselbe Kürzen wie in Aufgabe 3, nur mit unbequemen Zahlen.

Lösung 8

Nenner: $x^2 = 0 \Rightarrow x_0 = 0$, also $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Zähler bei $x_0 = 0$: $0 + 10^{100} = 10^{100} \neq 0 \rightarrow$ **Polstelle**.

Vorzeichentabelle:

	$x \rightarrow 0^-$	$x \rightarrow 0^+$
$x + 10^{100}$	$\approx 10^{100} > 0$	$\approx 10^{100} > 0$
x^2	$\rightarrow 0^+$	$\rightarrow 0^+$
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$

Der Nenner ist als Quadrat beidseitig positiv $\rightarrow$ Polstelle **ohne** Vorzeichenwechsel, genau wie bei $\frac{2}{x^2}$ in Aufgabe 2a.