

Vollständige Kurvendiskussion gebrochen-rationaler Funktionen

Klasse 11

2026-08-19

Grundidee

Die vollständige Analyse einer gebrochen-rationalen Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ läuft immer in derselben Reihenfolge ab:

Schritt	Was tun	Wie
1. Definitionsmenge	Nennernullstellen ausschließen	$q(x) = 0$ lösen
2. Hebbare Lücken	gemeinsame Faktoren kürzen	$p(x_0) = q(x_0) = 0$?
3. Symmetrie	$f(-x)$ bilden	gerade: $f(-x) = f(x)$; ungerade: $f(-x) = -f(x)$
4. Nullstellen	Zähler null setzen	$p(x) = 0$, Ergebnis in D prüfen
5. Polstellen	Verhalten links/rechts	Vorzeichentabelle
6. Grenzverhalten	Gradvergleich	waagrechte bzw. schräge Asymptote
7. y -Achsenabschnitt	$x = 0$ einsetzen	nur falls $0 \in D$

i Reihenfolge ist kein Zufall

Schritt 2 steht vor Schritt 4 und 5: Erst nach dem Kürzen weiß man sicher, welche Definitionslücken echte Polstellen sind und welche Zählernullstellen wirklich zählen.

Bei **Symmetrie** genügt es oft, nur die rechte Hälfte zu untersuchen — die linke ergibt sich durch Spiegelung bzw. Punktspiegelung.

Aufgaben

Aufgabe 1

Führe eine vollständige Kurvendiskussion durch (alle 7 Schritte):

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$$

Aufgaben

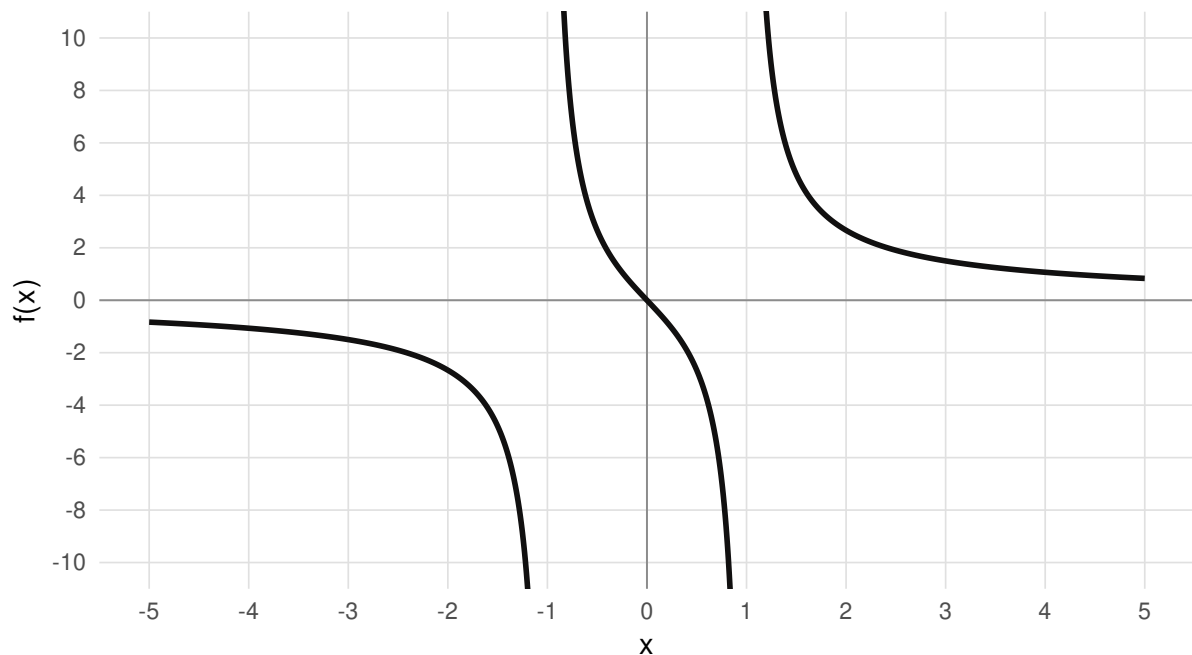
Aufgabe 2

Führe eine vollständige Kurvendiskussion durch:

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2}$$

Aufgabe 3

Lies aus dem Graphen alle Ergebnisse einer Kurvendiskussion ab: Definitionsmenge, Nullstellen, Polstellen, waagrechte Asymptote, Symmetrie und y -Achsenabschnitt.



Aufgabe 4

Führe eine vollständige Kurvendiskussion durch:

$$f(x) = \frac{4x}{x^2 - 1}$$

Vergleiche dein Ergebnis anschließend mit dem Graphen aus Aufgabe 3.

Aufgabe 5

Führe eine vollständige Kurvendiskussion durch. Achte besonders auf Schritt 2:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9}$$

Aufgabe 6

Führe eine vollständige Kurvendiskussion durch. Hier tritt statt einer waagrechten eine **schräge** Asymptote auf:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x}$$

Aufgabe 7

Führe eine vollständige Kurvendiskussion durch:

$$f(x) = \frac{10^6 x^2 - 10^6}{x^2 - 4}$$

Aufgabe 8

Führe eine vollständige Kurvendiskussion durch:

$$f(x) = \frac{x^2 - 10^{-6}}{x^2 + 10^{-6}}$$

Lösungen

Lösung 1

1. Definitionsmenge: $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2) = 0 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

2. Hebbare Lücken: Zähler bei $x = \pm 2$: $4 - 9 = -5 \neq 0 \rightarrow$ keine gemeinsamen Nullstellen, **keine** hebbaren Lücken.

3. Symmetrie:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 9}{(-x)^2 - 4} = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4} = f(x)$$

$\rightarrow$ **gerade**, achsensymmetrisch zur y -Achse.

4. Nullstellen: $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$. Beide liegen in D

Nullstellen: $x_1 = -3, x_2 = 3$

5. Polstellen: bei $x = \pm 2$. Vorzeichentabelle für $x_0 = 2$:

	$x \rightarrow 2^-$	$x \rightarrow 2^+$
$x^2 - 9$	$-5 < 0$	$-5 < 0$
$(x - 2)(x + 2)$	$\rightarrow 0^-$	$\rightarrow 0^+$
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

$\rightarrow$ Vorzeichenwechsel; wegen der Symmetrie verhält sich $x = -2$ spiegelbildlich.

6. Grenzverhalten: $m = n = 2$, führende Koeffizienten 1 und 1:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{waagrechte Asymptote } y = 1$$

7. y-Achsenabschnitt: $f(0) = \frac{-9}{-4} = \frac{9}{4} = 2,25$

Lösung 2

1. $x + 2 = 0 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$
2. Zähler bei $x = -2$: $-3 \neq 0 \rightarrow$ keine hebbare Lücke.
3. $f(-x) = \frac{-x-1}{-x+2}$. Das ist weder $f(x)$ noch $-f(x) \rightarrow$ **keine** Symmetrie.
4. $x - 1 = 0 \Rightarrow x_0 = 1 \in D \rightarrow$ Nullstelle bei $x = 1$.
5. Polstelle bei $x = -2$:

	$x \rightarrow -2^-$	$x \rightarrow -2^+$
$x - 1$	$-3 < 0$	$-3 < 0$
$x + 2$	$\rightarrow 0^-$	$\rightarrow 0^+$
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

$\rightarrow$ mit Vorzeichenwechsel.

6. $m = n = 1$, führende Koeffizienten 1 und 1 $\rightarrow y = 1$
7. $f(0) = \frac{-1}{2} = -0,5$

Lösung 3

Aus dem Bild:

- **Definitionsmenge:** senkrechte Asymptoten bei $x = -1$ und $x = 1 \rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
- **Nullstelle:** der Graph schneidet die x -Achse bei $x = 0$
- **Polstellen:** $x = -1$ und $x = 1$, an beiden mit Vorzeichenwechsel (die Äste laufen links und rechts in verschiedene Richtungen)
- **Waagrechte Asymptote:** $y = 0$ — außen legt sich der Graph an die x -Achse
- **Symmetrie:** punktsymmetrisch zum Ursprung, also **ungerade**
- **y -Achsenabschnitt:** $f(0) = 0$ (identisch mit der Nullstelle)

Lösung 4

1. $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) = 0 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
2. Zähler bei $x = \pm 1$: $\pm 4 \neq 0 \rightarrow$ keine hebbaren Lücken.
3. $f(-x) = \frac{-4x}{x^2 - 1} = -f(x) \rightarrow$ **ungerade**, punktsymmetrisch zum Ursprung.
4. $4x = 0 \Rightarrow x_0 = 0 \in D \rightarrow$ einzige Nullstelle $x = 0$.
5. Polstellen bei $x = \pm 1$. Für $x_0 = 1$:

	$x \rightarrow 1^-$	$x \rightarrow 1^+$
$4x$	$4 > 0$	$4 > 0$
$(x - 1)(x + 1)$	$\rightarrow 0^-$	$\rightarrow 0^+$

	$x \rightarrow 1^-$	$x \rightarrow 1^+$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

→ Vorzeichenwechsel; bei $x = -1$ wegen Punktsymmetrie entsprechend umgekehrt.

6. $m = 1 < n = 2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, waagrechte Asymptote $y = 0$.

7. $f(0) = 0$

Alle sieben Ergebnisse stimmen mit dem abgelesenen Graphen aus Aufgabe 3 überein.

Lösung 5

1. $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3) = 0 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$

2. Zähler faktorisieren: $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$

Bei $x = 3$ werden Zähler **und** Nenner null → kürzen:

$$f(x) = \frac{(x - 3)(x + 2)}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{x + 2}{x + 3} \quad (x \neq 3)$$

→ **hebbare Lücke** bei $x = 3$ mit $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{5}{6}$

3. $f(-x) = \frac{-x + 2}{-x + 3} \rightarrow$ weder $f(x)$ noch $-f(x) \rightarrow$ **keine** Symmetrie.

4. Gekürzter Zähler: $x + 2 = 0 \Rightarrow x_0 = -2 \in D \rightarrow$ Nullstelle bei $x = -2$.

(Die Stelle $x = 3$ ist trotz $p(3) = 0$ **keine** Nullstelle — dort ist f nicht definiert.)

5. Nach dem Kürzen bleibt nur $x = -3$ als Polstelle:

	$x \rightarrow -3^-$	$x \rightarrow -3^+$
$x + 2$	$-1 < 0$	$-1 < 0$
$x + 3$	$\rightarrow 0^-$	$\rightarrow 0^+$
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

→ mit Vorzeichenwechsel.

6. $m = n = 2$ (bzw. nach Kürzen $m = n = 1$), führende Koeffizienten jeweils gleich → $y = 1$

7. $f(0) = \frac{-6}{-9} = \frac{2}{3} \approx 0,67$

Lösung 6

1. $x = 0 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
2. Zähler bei $x = 0$: $2 \neq 0 \rightarrow$ keine hebbare Lücke.
3. $f(-x) = \frac{x^2 + 2}{-x} = -f(x) \rightarrow$ **ungerade**.
4. $x^2 + 2 = 0$ hat keine reelle Lösung (denn $x^2 + 2 \geq 2 > 0$) $\rightarrow$ **keine Nullstellen**.
5. Polstelle bei $x = 0$:

	$x \rightarrow 0^-$	$x \rightarrow 0^+$
$x^2 + 2$	$\rightarrow 2 > 0$	$\rightarrow 2 > 0$
x	$\rightarrow 0^-$	$\rightarrow 0^+$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

$\rightarrow$ mit Vorzeichenwechsel.

6. $m = 2 = n + 1 \rightarrow$ schräge Asymptote. Zerlegen:

$$f(x) = \frac{x^2}{x} + \frac{2}{x} = x + \frac{2}{x} \quad \Rightarrow \quad y = x$$

7. $0 \notin D \rightarrow$ **kein** y -Achsenabschnitt.

Lösung 7

1. $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$
2. Zähler ausklammern: $10^6 x^2 - 10^6 = 10^6 (x^2 - 1) = 10^6 (x - 1)(x + 1)$
Bei $x = \pm 2$ ist der Zähler $10^6 \cdot 3 \neq 0 \rightarrow$ keine hebbaren Lücken.
3. Nur gerade Potenzen in Zähler und Nenner:

$$f(-x) = \frac{10^6 x^2 - 10^6}{x^2 - 4} = f(x) \quad \Rightarrow \quad \text{gerade}$$

4. $10^6 (x - 1)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$, beide in D

Nullstellen: $x_1 = -1, x_2 = 1$

5. Polstellen bei $x = \pm 2$. Für $x_0 = 2$: Zähler $= 10^6 \cdot 3 > 0$, Nenner wechselt von 0^- auf 0^+ :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

$\rightarrow$ mit Vorzeichenwechsel (bei $x = -2$ spiegelbildlich).

6. $m = n = 2$, führende Koeffizienten 10^6 und 1:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{10^6}{1} = 10^6 \quad \Rightarrow \quad y = 10^6$$

7. $f(0) = \frac{-10^6}{-4} = 250\,000$

Der Faktor 10^6 ändert nur die Höhe der Asymptote — das Verfahren ist identisch zu Aufgabe 1.

Lösung 8

1. $x^2 + 10^{-6} \geq 10^{-6} > 0$ für alle x — der Nenner wird nie null:

$$D = \mathbb{R}$$

2. Keine Definitionslücken $\rightarrow$ keine hebbaren Lücken.

3. Nur gerade Potenzen $\rightarrow f(-x) = f(x)$, also **gerade**.

4. $x^2 - 10^{-6} = 0 \Rightarrow x^2 = 10^{-6} \Rightarrow x = \pm 10^{-3}$

Nullstellen: $x_1 = -0,001$, $x_2 = 0,001$

5. **Keine Polstellen**, da $D = \mathbb{R}$ — der Graph ist überall stetig.

6. $m = n = 2$, führende Koeffizienten beide 1:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 1$$

7. $f(0) = \frac{-10^{-6}}{10^{-6}} = -1$

Die Funktion steigt also von -1 bei $x = 0$ auf beiden Seiten gegen die Asymptote $y = 1$ an — dieselben sieben Schritte wie zuvor, nur mit sehr kleinen statt sehr großen Zahlen.