

Gebrochen-rationale Funktionen: Definitionsmenge und Nullstellen

Klasse 11

2026-08-19

Grundidee

Eine **gebrochen-rationale Funktion** hat die Form

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

mit Polynomen p und q . In Klasse 11 haben Zähler und Nenner höchstens Grad 2.

Definitionsmenge. Durch null darf nicht geteilt werden — man schließt alle Nullstellen des **Nenners** aus:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{x \mid q(x) = 0\}$$

Nullstellen. Ein Bruch ist genau dann null, wenn sein Zähler null ist. Der Nenner muss dabei ungleich null bleiben:

$$f(x_0) = 0 \iff p(x_0) = 0 \text{ und } q(x_0) \neq 0$$

i Der entscheidende zweite Schritt

Eine Nullstelle des Zählers ist nur dann eine Nullstelle von f , wenn sie **in D liegt**. Fällt sie mit einer Definitionslücke zusammen, ist sie keine Nullstelle — dort ist f überhaupt nicht definiert.

Vorgehen:

1. Nenner faktorisieren, $q(x) = 0$ lösen $\rightarrow$ Definitionslücken, damit D
2. Zähler faktorisieren, $p(x) = 0$ lösen $\rightarrow$ Kandidaten für Nullstellen
3. Jeden Kandidaten prüfen: liegt er in D ?

Aufgaben

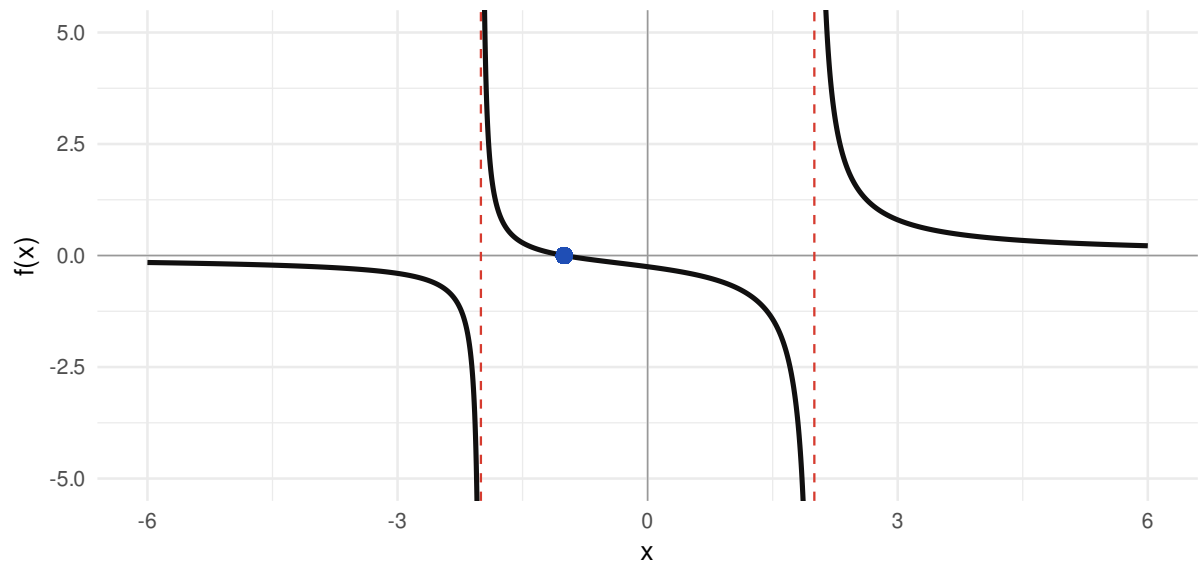


Abbildung 1: $f(x) = (x+1)/(x^2-4)$: Definitionslücken bei $x = -2$ und $x = 2$ (gestrichelt), Nullstelle bei $x = -1$ (Punkt)

Aufgaben

Aufgabe 1

Gegeben ist

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$$

Bestimme die Definitionsmenge und alle Nullstellen.

Aufgabe 2

Bestimme jeweils Definitionsmenge und Nullstellen:

a) $f(x) = \frac{1}{x-3}$

b) $g(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$

c) $h(x) = \frac{2x+6}{x^2-9}$

Aufgabe 3

Bestimme Definitionsmenge und Nullstellen von

$$f(x) = \frac{x-4}{x^2-5x+6}$$

Aufgabe 4

Gegeben ist

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

- a) Bestimme D .
- b) Welche Nullstellen hat der Zähler?
- c) Welche davon sind Nullstellen von f ? Begründe.

Aufgabe 5

Gegeben ist $f_a(x) = \frac{x - a}{x^2 - 4}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

- a) Für welches a hat f_a eine Nullstelle bei $x = 3$?
- b) Für welche a besitzt f_a **gar keine** Nullstelle?

Aufgabe 6

Bestimme Definitionsmenge und Nullstellen von

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 + 2x + 5}$$

Aufgabe 7

Bestimme Definitionsmenge und Nullstellen von

$$f(x) = \frac{x - 10^6}{x^2 - 10^{12}}$$

Aufgabe 8

Bestimme Definitionsmenge und Nullstellen von

$$f(x) = \frac{10^{100} x^2 - 10^{100}}{x^2 + 1}$$

Lösungen

Lösung 1

Nenner: $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 2$ oder $x = -2$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

Zähler: $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

Probe: $-1 \in D$ und $q(-1) = 1 - 4 = -3 \neq 0$

Einzige Nullstelle: $x_0 = -1$

Lösung 2

a) Nenner $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$, also $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Der Zähler ist konstant 1 und wird nie null $\rightarrow$ **keine Nullstellen**.

b) Nenner $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ für alle x — der Nenner wird nie null:

$$D = \mathbb{R}$$

Zähler: $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$. Nullstelle: $x_0 = 1$

c) Nenner $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3) = 0 \Rightarrow x = \pm 3$, also $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$.

Zähler: $2x + 6 = 2(x + 3) = 0 \Rightarrow x = -3$.

Aber $-3 \notin D$! Die Zählernullstelle fällt mit einer Definitionslücke zusammen.

$\rightarrow h$ hat **keine Nullstelle**.

Lösung 3

Nenner mit Satz von Vieta oder Mitternachtsformel:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ oder } x = 3$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$$

Zähler: $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

Probe: $4 \in D$, Nenner $16 - 20 + 6 = 2 \neq 0$

Nullstelle: $x_0 = 4$

Lösung 4

a) Nenner $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$, also $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 1$ und $x = -1$.

c) Nur $x_0 = -1$ ist Nullstelle von f .

Die Stelle $x = 1$ ist zwar Nullstelle des Zählers, liegt aber **nicht in D** — dort ist f gar nicht definiert. (Kürzt man, so ergibt sich $f(x) = x + 1$ für $x \neq 1$: der Graph ist die Gerade $y = x + 1$ mit einer Lücke bei $x = 1$.)

Lösung 5

Lösungen

a) Gefordert ist $p(3) = 0$, also $3 - a = 0$:

$$a = 3$$

Probe: $q(3) = 9 - 4 = 5 \neq 0$ — für $a = 3$ liegt tatsächlich eine Nullstelle bei $x = 3$.

b) Der Zähler $x - a$ hat immer genau die Nullstelle $x = a$. Sie ist genau dann **keine** Nullstelle von f_a , wenn sie mit einer Definitionslücke zusammenfällt:

$$a = 2 \quad \text{oder} \quad a = -2$$

Lösung 6

Nenner: $x^2 + 2x + 5 = 0$. Diskriminante:

$$D_{\text{isk}} = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16 < 0$$

Der Nenner hat **keine reellen Nullstellen** (er ist wegen $x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4 \geq 4$ stets positiv):

$$D = \mathbb{R}$$

Zähler: $x^2 - 3x = x(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = 3$

Beide liegen in $D = \mathbb{R}$

Nullstellen: $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$

Lösung 7

Nenner: $x^2 - 10^{12} = 0 \Rightarrow x^2 = 10^{12} \Rightarrow x = \pm 10^6$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-10^6, 10^6\}$$

Zähler: $x - 10^6 = 0 \Rightarrow x = 10^6$

Diese Stelle liegt **nicht in** D — genau wie in Aufgabe 4 fällt die Zählernullstelle mit einer Definitionslücke zusammen.

$\rightarrow f$ hat **keine Nullstelle**.

(Gekürzt: $f(x) = \frac{x - 10^6}{(x - 10^6)(x + 10^6)} = \frac{1}{x + 10^6}$ für $x \neq 10^6$ — und dieser Bruch wird nie null.)

Lösung 8

Nenner: $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ für alle x — nie null:

$$D = \mathbb{R}$$

Zähler: ausklammern statt erschrecken:

$$10^{100}x^2 - 10^{100} = 10^{100}(x^2 - 1) = 10^{100}(x - 1)(x + 1) = 0$$

Da $10^{100} \neq 0$, folgt $x = 1$ oder $x = -1$. Beide liegen in D

Nullstellen: $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$

Der riesige Faktor 10^{100} ändert am Verfahren nichts — er lässt sich ausklammern und wegteilen.