

Waagrechte und schräge Asymptoten

Klasse 11

2026-08-19

Grundidee

Für $x \rightarrow \pm\infty$ entscheidet allein der **Gradvergleich** von Zähler ($\deg p = m$) und Nenner ($\deg q = n$):

Fall	Grenzverhalten	Asymptote
$m < n$	$f(x) \rightarrow 0$	waagrecht: $y = 0$
$m = n$	$f(x) \rightarrow \frac{a_m}{b_n}$	waagrecht: $y = \frac{a_m}{b_n}$
$m = n + 1$	$ f(x) \rightarrow \infty$, linear	schräg : $y = ax + b$
$m > n + 1$	$ f(x) \rightarrow \infty$	keine Gerade als Asymptote

Dabei sind a_m und b_n die **führenden Koeffizienten** (die bei der höchsten Potenz), nicht etwa die konstanten Glieder.

Schräge Asymptote per Polynomdivision. Ist $m = n + 1$, teilt man $p(x)$ durch $q(x)$:

$$f(x) = \underbrace{ax + b}_{\text{Asymptote}} + \underbrace{\frac{r(x)}{q(x)}}_{\rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \pm\infty}$$

Der Restterm verschwindet im Unendlichen — übrig bleibt die Gerade $y = ax + b$.

Beispiel: $\frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1} = x - 1 + \frac{2}{x - 1}$, also schräge Asymptote $y = x - 1$.

Aufgaben

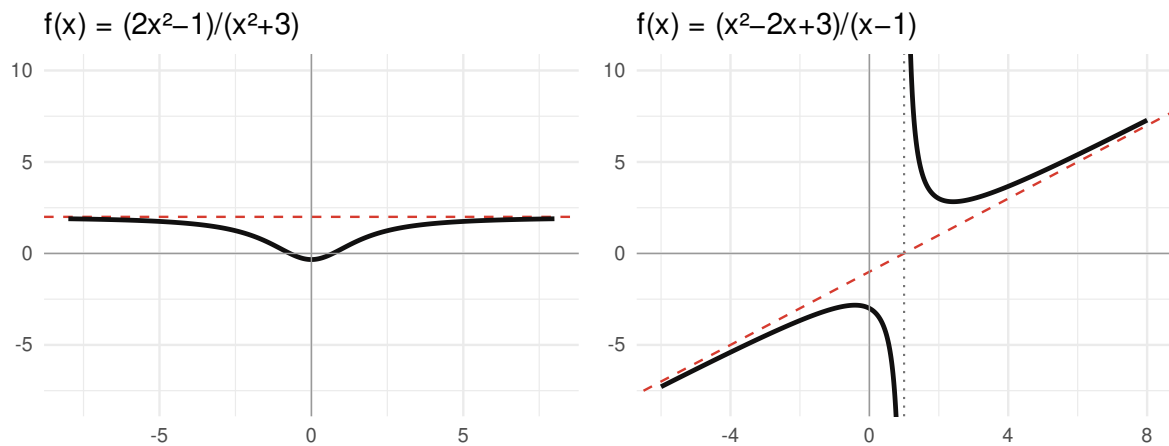


Abbildung 1: Links waagrechte Asymptote $y = 2$ (Grad gleich), rechts schräge Asymptote $y = x - 1$ (Zählergrad um 1 größer)

Aufgaben

Aufgabe 1

Bestimme das Grenzwertverhalten für $x \rightarrow \pm\infty$ und gib die waagrechte Asymptote an:

$$f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$$

Aufgabe 2

Bestimme jeweils die waagrechte Asymptote:

a) $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 3}$

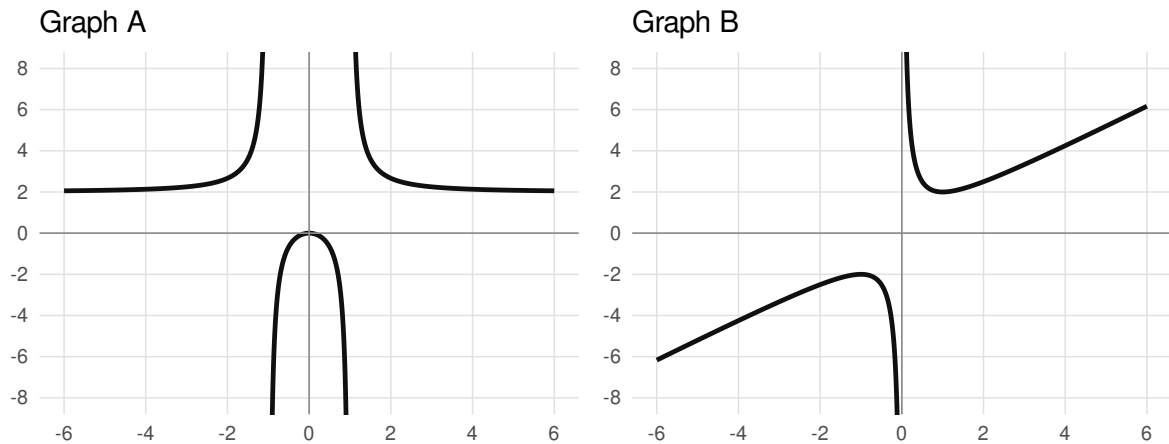
b) $g(x) = \frac{x + 5}{x^2 - 4}$

c) $h(x) = \frac{4x^2 + x}{2x^2 - 8}$

Aufgabe 3

Lies aus den beiden Graphen jeweils ab: alle senkrechten Asymptoten sowie die waagrechte bzw. schräge Asymptote. Gib außerdem an, in welchem Verhältnis Zähler- und Nennergrad stehen müssen.

Aufgaben



Aufgabe 4

Gegeben ist

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

- Begründe mit dem Gradvergleich, dass eine schräge Asymptote existiert.
- Bestimme sie durch Zerlegen des Bruchs.

Aufgabe 5

Bestimme die schräge Asymptote mittels Polynomdivision:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$$

Aufgabe 6

Bestimme die schräge Asymptote sowie die senkrechte Asymptote von

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 1}{x + 2}$$

Aufgabe 7

Bestimme die waagrechte Asymptote von

$$f(x) = \frac{10^{100} x^2 + 1}{10^{99} x^2 + 5}$$

Aufgabe 8

Bestimme die schräge Asymptote von

$$f(x) = \frac{x^2 + 10^{50}}{x - 10^{25}}$$

Lösungen

Lösung 1

Zählergrad $m = 1$, Nennergrad $n = 2$, also $m < n$.

Rechnerisch (Kürzen durch die höchste Nennerpotenz x^2):

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

Waagrechte Asymptote: $y = 0$ (die x -Achse).

Lösung 2

a) $m = n = 2$, führende Koeffizienten 2 und 1:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{2}{1} = 2 \quad \Rightarrow \quad y = 2$$

b) $m = 1 < n = 2 \rightarrow y = 0$

c) $m = n = 2$, führende Koeffizienten 4 und 2:

$$\frac{4}{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad y = 2$$

Achtung: Es zählen nur die Koeffizienten bei x^2 — die Terme $+x$ und -8 spielen für das Grenzverhalten keine Rolle.

Lösung 3

Graph A: senkrechte Asymptoten bei $x = -1$ und $x = 1$; waagrechte Asymptote $y = 2$ (beide Äste außen nähern sich der Höhe 2).

Weil eine **waagrechte** Asymptote mit Wert $\neq 0$ vorliegt, muss $m = n$ gelten — Zähler- und Nennergrad sind gleich, das Verhältnis der führenden Koeffizienten ist 2.

(Es handelt sich um $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$.)

Graph B: senkrechte Asymptote bei $x = 0$; **schräge** Asymptote $y = x$ (die Äste legen sich außen an die Winkelhalbierende).

Eine schräge Asymptote bedeutet $m = n + 1$ — der Zählergrad ist um genau 1 größer als der Nennergrad.

(Es handelt sich um $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$.)

Lösung 4

- a) $m = 2, n = 1$, also $m = n + 1 \rightarrow$ es existiert eine schräge Asymptote.
 b) Der Bruch lässt sich gliedweise zerlegen:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} = x + \frac{1}{x}$$

Für $x \rightarrow \pm\infty$ gilt $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, also bleibt

$$y = x$$

Lösung 5

Polynomdivision $(x^2 - 2x + 3) : (x - 1)$:

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x + 3 : (x - 1) = x - 1 \text{ Rest } 2 \\ - (x^2 - x) \\ \hline -x + 3 \\ - (-x + 1) \\ \hline 2 \end{array}$$

Also

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{x - 1}$$

Da $\frac{2}{x-1} \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \pm\infty$, ist die schräge Asymptote

$$y = x - 1$$

Probe: $(x - 1)(x - 1) + 2 = x^2 - 2x + 1 + 2 = x^2 - 2x + 3$

Lösung 6

Senkrechte Asymptote: Nenner $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$. Zähler dort: $2 \cdot 4 - 6 - 1 = 1 \neq 0 \rightarrow$ Polstelle, senkrechte Asymptote $x = -2$.

Schräge Asymptote: $m = 2 = n + 1$, Polynomdivision $(2x^2 + 3x - 1) : (x + 2)$:

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 3x - 1 : (x + 2) = 2x - 1 \text{ Rest } 1 \\ - (2x^2 + 4x) \\ \hline -x - 1 \\ - (-x - 2) \\ \hline 1 \end{array}$$

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x+2} \implies y = 2x - 1$$

$$\text{Probe: } (2x - 1)(x + 2) + 1 = 2x^2 + 4x - x - 2 + 1 = 2x^2 + 3x - 1$$

Lösung 7

$m = n = 2$. Es zählt nur das Verhältnis der führenden Koeffizienten:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{10^{100}}{10^{99}} = 10^{100-99} = 10$$

Waagrechte Asymptote: $y = 10$

Die Summanden $+1$ und $+5$ sind für $x \rightarrow \pm\infty$ bedeutungslos — dasselbe Vorgehen wie in Aufgabe 2a.

Lösung 8

$m = 2$, $n = 1$, also $m = n + 1 \rightarrow$ schräge Asymptote. Polynomdivision $(x^2 + 10^{50}) : (x - 10^{25})$:

Erster Schritt: $x^2 : x = x$, und $x(x - 10^{25}) = x^2 - 10^{25}x$. Rest: $10^{25}x + 10^{50}$.

Zweiter Schritt: $10^{25}x : x = 10^{25}$, und $10^{25}(x - 10^{25}) = 10^{25}x - 10^{50}$. Rest: $2 \cdot 10^{50}$.

$$f(x) = x + 10^{25} + \frac{2 \cdot 10^{50}}{x - 10^{25}}$$

Schräge Asymptote:

$$y = x + 10^{25}$$

$$\text{Probe: } (x + 10^{25})(x - 10^{25}) + 2 \cdot 10^{50} = x^2 - 10^{50} + 2 \cdot 10^{50} = x^2 + 10^{50}$$