

Symmetrie von Funktionsgraphen

Klasse 11

2026-08-19

Grundidee

Man prüft Symmetrie, indem man $-x$ einsetzt und das Ergebnis mit $f(x)$ bzw. $-f(x)$ vergleicht.

Bedingung	Name	Bedeutung
$f(-x) = f(x)$	gerade Funktion	achsensymmetrisch zur y -Achse
$f(-x) = -f(x)$	ungerade Funktion	punktsymmetrisch zum Ursprung
keines von beiden	—	keine dieser Symmetrien

Kurzregel für Polynome: gerade $\Leftrightarrow$ alle Exponenten gerade; ungerade $\Leftrightarrow$ alle Exponenten ungerade. Ein konstantes Glied $a_0 = a_0 x^0$ zählt dabei als gerader Exponent.

Vorsicht: „keine Achsen- oder Punktsymmetrie“ heißt nicht „unsymmetrisch“ — der Graph kann zu einer *anderen* Achse symmetrisch sein, etwa $f(x) = (x-3)^2$ zur Geraden $x = 3$. Geprüft wird hier nur die Symmetrie zur y -Achse bzw. zum Ursprung.

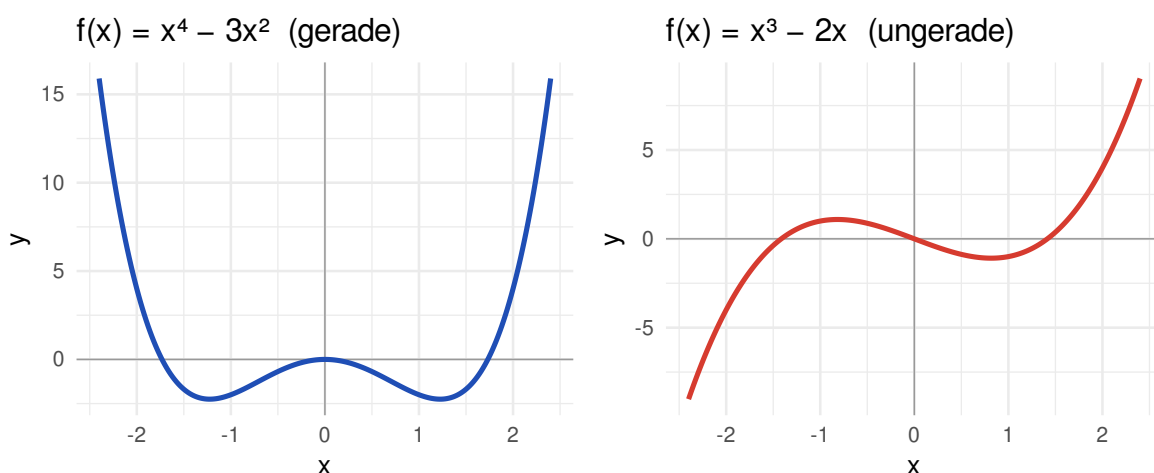


Abbildung 1: Links gerade (Spiegelung an der y -Achse), rechts ungerade (Drehung um 180° um den Ursprung)

Aufgaben

Aufgabe 1

Untersuche rechnerisch auf Symmetrie:

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$$

Aufgabe 2

Untersuche rechnerisch auf Symmetrie:

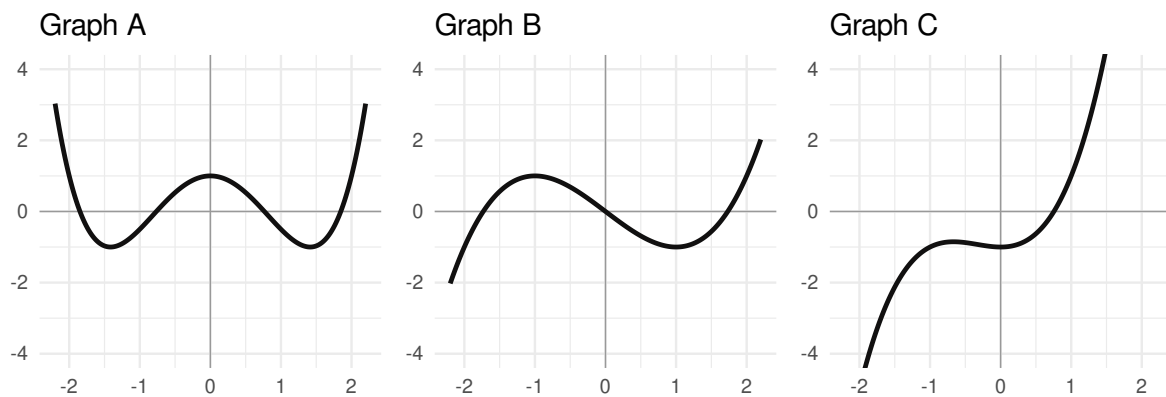
a) $f(x) = x^5 - 4x^3 + x$

b) $g(x) = x^3 + x^2$

c) $h(x) = 2x^6 - x^4 + 5$

Aufgabe 3

Ordne jedem der drei Graphen zu: *gerade*, *ungerade* oder *keines von beiden*. Begründe jeweils in einem Satz, woran du es im Bild erkennst.



Aufgabe 4

Untersuche auf Symmetrie:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^4 + 2}$$

Aufgabe 5

Untersuche auf Symmetrie:

a) $f(x) = x \cdot \sin x$

b) $g(x) = x^2 \cdot \cos x$

c) $h(x) = \frac{\sin x}{x}$ für $x \neq 0$

Aufgabe 6

Bestimme alle $a \in \mathbb{R}$, für die die Funktion

$$f(x) = x^4 + a x^3 - 2x^2 + (a - 1)x$$

gerade ist. Gibt es auch ein a , für das f ungerade wird?

Aufgabe 7

Untersuche auf Symmetrie:

$$f(x) = 7x^{202} - 3x^{100} + x^2 - 9$$

Aufgabe 8

Untersuche auf Symmetrie:

$$f(x) = x^{2025} - x^{999} + x$$

Lösungen

Lösung 1

$$f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 1 = x^4 - 3x^2 + 1 = f(x)$$

f ist **gerade**, der Graph ist achsensymmetrisch zur y -Achse. (Kurzregel: Exponenten 4, 2, 0 — alle gerade.)

Lösung 2

- a) $f(-x) = -x^5 + 4x^3 - x = -(x^5 - 4x^3 + x) = -f(x) \rightarrow$ **ungerade**
- b) $g(-x) = -x^3 + x^2$. Das ist weder $g(x) = x^3 + x^2$ noch $-g(x) = -x^3 - x^2 \rightarrow$ **keine** der beiden Symmetrien. (Gemischte Exponenten 3 und 2.)
- c) $h(-x) = 2x^6 - x^4 + 5 = h(x) \rightarrow$ **gerade** (Exponenten 6, 4, 0).
-

Lösung 3

- **Graph A: gerade.** Die linke Hälfte ist das Spiegelbild der rechten an der y -Achse; er schneidet die y -Achse in einem Hoch- oder Tiefpunkt.
- **Graph B: ungerade.** Dreht man den Graphen um 180° um den Ursprung, liegt er wieder auf sich selbst; insbesondere geht er durch den Ursprung.

- **Graph C: keines von beiden.** Weder Spiegelung an der y -Achse noch Drehung um den Ursprung führt den Graphen in sich über — er ist nach rechts „verzogen“.
-

Lösung 4

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^4 + 2} = \frac{x^2 - 1}{x^4 + 2} = f(x)$$

f ist **gerade**. Die Kurzregel gilt hier nicht direkt (es ist kein Polynom), das Einsetzen von $-x$ aber sehr wohl: Zähler und Nenner enthalten nur gerade Potenzen.

Lösung 5

a) $f(-x) = (-x) \cdot \sin(-x) = (-x) \cdot (-\sin x) = x \sin x = f(x) \rightarrow$ **gerade**

(ungerade $\cdot$ ungerade = gerade)

b) $g(-x) = (-x)^2 \cos(-x) = x^2 \cos x = g(x) \rightarrow$ **gerade**

(gerade $\cdot$ gerade = gerade)

c) $h(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = h(x) \rightarrow$ **gerade**

(ungerade $\div$ ungerade = gerade)

Lösung 6

f ist ein Polynom mit den Exponenten 4, 3, 2, 1. Gerade wird f genau dann, wenn alle ungeraden Potenzen verschwinden, also wenn beide zugehörigen Koeffizienten null sind:

$$a = 0 \quad \text{und} \quad a - 1 = 0$$

Diese beiden Bedingungen widersprechen sich ($a = 0$ und $a = 1$). Es gibt also **kein** a , für das f gerade ist.

Ungerade wäre f , wenn alle geraden Potenzen verschwänden — aber x^4 hat den festen Koeffizienten $1 \neq 0$ und $-2x^2$ den festen Koeffizienten $-2 \neq 0$. Also auch **kein** a für ungerade.

Lösung 7

Alle Exponenten sind gerade: 202, 100, 2 und 0 (die -9). Also:

$$f(-x) = 7x^{202} - 3x^{100} + x^2 - 9 = f(x)$$

f ist **gerade**. Dieselbe Prüfung wie in Aufgabe 1 — die Größe der Exponenten spielt keine Rolle, nur ihre Parität.

Lösung 8

Alle Exponenten sind ungerade: 2025, 999, 1.

$$f(-x) = -x^{2025} + x^{999} - x = -(x^{2025} - x^{999} + x) = -f(x)$$

f ist **ungerade**, der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung.