

Stetigkeit und Unstetigkeitsstellen

Klasse 11

2026-08-19

Grundidee

f heißt **stetig an der Stelle** x_0 , wenn drei Dinge zusammenpassen:

1. $f(x_0)$ ist definiert,
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert,
3. beide Werte sind gleich: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Anschaulich: der Graph lässt sich **ohne Absetzen des Stiftes** zeichnen.

Prüfung bei abschnittsweise definierten Funktionen an der Übergangsstelle x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \stackrel{?}{=} f(x_0)$$

Also: linken Term für $x \rightarrow x_0$ auswerten, rechten Term für $x \rightarrow x_0$ auswerten, Funktionswert bestimmen — stimmen alle drei überein, ist f stetig.

Typ	Merkmal
Sprungstelle	linker und rechter Grenzwert existieren, sind aber verschieden
Hebbare Lücke	Grenzwert existiert, $f(x_0)$ fehlt oder passt nicht
Polstelle	$ f(x) \rightarrow \infty$

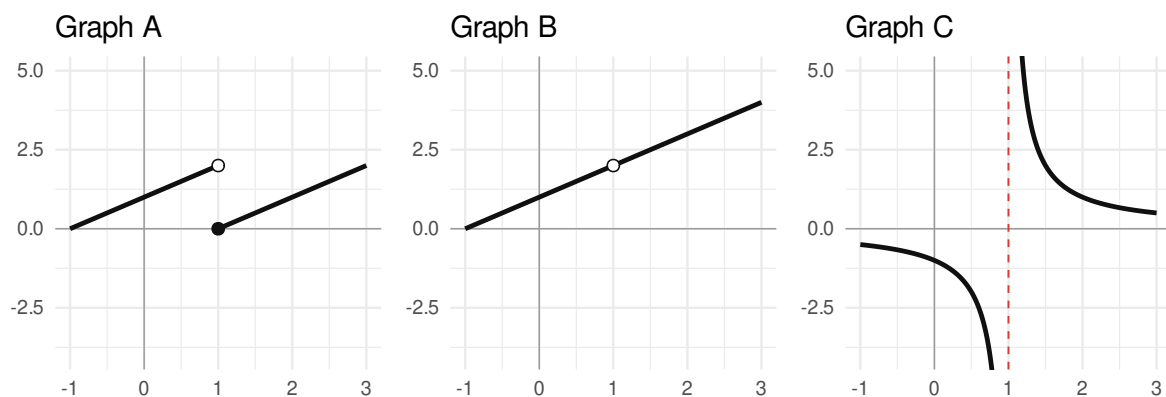


Abbildung 1: Die drei Arten von Unstetigkeit an der Stelle $x = 1$

Aufgaben

Aufgabe 1

Untersuche, ob f an der Stelle $x_0 = 1$ stetig ist:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Aufgabe 2

Untersuche jeweils an der angegebenen Stelle auf Stetigkeit:

a) $f(x) = \begin{cases} x + 3 & x < 2 \\ x^2 & x \geq 2 \end{cases}$ bei $x_0 = 2$

b) $g(x) = \begin{cases} 4 - x & x \leq 0 \\ x^2 + 4 & x > 0 \end{cases}$ bei $x_0 = 0$

Aufgabe 3

Ordne den drei Graphen der Einführung (A, B, C) jeweils den Typ der Unstetigkeitsstelle zu und gib an, welche der drei Stetigkeitsbedingungen dort verletzt ist.

Aufgabe 4

Bestimme $a \in \mathbb{R}$ so, dass f an der Stelle $x_0 = 2$ stetig ist:

$$f(x) = \begin{cases} ax + 1 & x < 2 \\ x^2 - 3 & x \geq 2 \end{cases}$$

Aufgabe 5

Gegeben ist $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ für $x \neq 2$.

- a) Welcher Typ von Unstetigkeitsstelle liegt bei $x_0 = 2$ vor?
- b) Wie muss $f(2)$ definiert werden, damit f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist?

Aufgabe 6

Bestimme a und b so, dass f überall stetig ist:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x < 0 \\ ax^2 + b & 0 \leq x \leq 2 \\ 3x - 5 & x > 2 \end{cases}$$

Aufgabe 7

Untersuche auf Stetigkeit bei $x_0 = 10^6$:

$$f(x) = \begin{cases} 10^{-6} x + 1 & x < 10^6 \\ 2 & x \geq 10^6 \end{cases}$$

Aufgabe 8

Gegeben ist $f(x) = \frac{x^{50} - 1}{x - 1}$ für $x \neq 1$.

Welcher Typ von Unstetigkeitsstelle liegt bei $x_0 = 1$ vor, und wie muss $f(1)$ festgelegt werden, damit f dort stetig wird?

Lösungen

Lösung 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 1) = 1, \quad f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

Alle drei Werte stimmen überein $\rightarrow f$ ist bei $x_0 = 1$ **stetig**.

Lösung 2

a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x + 3) = 5$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 = 4$, $f(2) = 4$.

Linker und rechter Grenzwert sind verschieden $\rightarrow$ **Sprungstelle**, f ist bei $x_0 = 2$ **nicht stetig** (Sprunghöhe 1).

b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} (4 - x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 4) = 4$, $f(0) = 4 - 0 = 4$.

Alle drei gleich $\rightarrow$ **stetig**.

Lösung 3

- **Graph A — Sprungstelle.** Linker Grenzwert 2, rechter Grenzwert 0: Bedingung 2 ist verletzt, der Grenzwert existiert nicht.
- **Graph B — hebbare Lücke.** Der Grenzwert existiert ($= 2$), aber $f(1)$ ist nicht definiert: Bedingung 1 ist verletzt.
- **Graph C — Polstelle.** $|f(x)| \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow 1$: Bedingungen 1 und 2 sind verletzt, es gibt eine senkrechte Asymptote.

Lösung 4

Rechter Grenzwert und Funktionswert: $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 3) = 1 = f(2)$.

Linker Grenzwert: $\lim_{x \rightarrow 2^-} (ax + 1) = 2a + 1$.

Gleichsetzen:

$$2a + 1 = 1 \implies a = 0$$

Für $a = 0$ ist f bei $x_0 = 2$ stetig (der linke Ast ist dann die konstante Funktion 1).

Lösung 5

a) Zähler und Nenner werden bei $x = 2$ beide null, also kürzen:

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2 \quad (x \neq 2)$$

Der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ existiert, nur der Funktionswert fehlt $\rightarrow$ **hebbare Lücke**.

b) Man definiert $f(2) := 4$. Dann ist $f(x) = x + 2$ für alle x und damit überall stetig.

Lösung 6

Zwei Übergangsstellen, zwei Bedingungen.

Bei $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1) = 1 \stackrel{!}{=} a \cdot 0^2 + b = b \implies b = 1$$

Bei $x_0 = 2$:

$$a \cdot 2^2 + b = 4a + b \stackrel{!}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x - 5) = 1$$

Mit $b = 1$: $4a + 1 = 1 \Rightarrow a = 0$.

$$a = 0, \quad b = 1$$

Der mittlere Ast ist dann konstant 1.

Lösung 7

$$\lim_{x \rightarrow (10^6)^-} (10^{-6}x + 1) = 10^{-6} \cdot 10^6 + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow (10^6)^+} 2 = 2, \quad f(10^6) = 2$$

Alle drei Werte sind $2 \rightarrow f$ ist **stetig**. Dieselbe Prüfung wie in Aufgabe 1, nur mit unbequemen Zahlen.

Lösung 8

Mit $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + \dots + x + 1)$:

$$f(x) = \frac{(x - 1)(x^{49} + x^{48} + \dots + x + 1)}{x - 1} = x^{49} + x^{48} + \dots + x + 1 \quad (x \neq 1)$$

Der Grenzwert existiert, es liegt eine **hebbare Lücke** vor. Für $x \rightarrow 1$ wird jeder der 50 Summanden zu 1:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 50 \quad \Rightarrow \quad f(1) := 50$$