

Grenzverhalten und Grenzwerte

Klasse 11

2026-08-19

Grundidee

Das **Grenzverhalten** beschreibt, wohin $f(x)$ läuft, wenn x beliebig groß oder beliebig klein wird.

Bei **ganzrationalen Funktionen** entscheidet allein der **Leitterm** $a_n x^n$. Alle übrigen Summanden fallen für große $|x|$ nicht mehr ins Gewicht — egal wie groß ihre Koeffizienten sind.

Grad n	$a_n > 0$	$a_n < 0$
gerade	$+\infty$ für $x \rightarrow \pm\infty$	$-\infty$ für $x \rightarrow \pm\infty$
ungerade	$-\infty$ (links), $+\infty$ (rechts)	$+\infty$ (links), $-\infty$ (rechts)

Grenzwert an einer Stelle: Werden bei x_0 Zähler *und* Nenner null, so faktorisiert man beide und kürzt den gemeinsamen Faktor. Danach darf eingesetzt werden.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{mit } p(x_0) = q(x_0) = 0 \rightarrow \text{faktorisieren, kürzen, einsetzen}$$

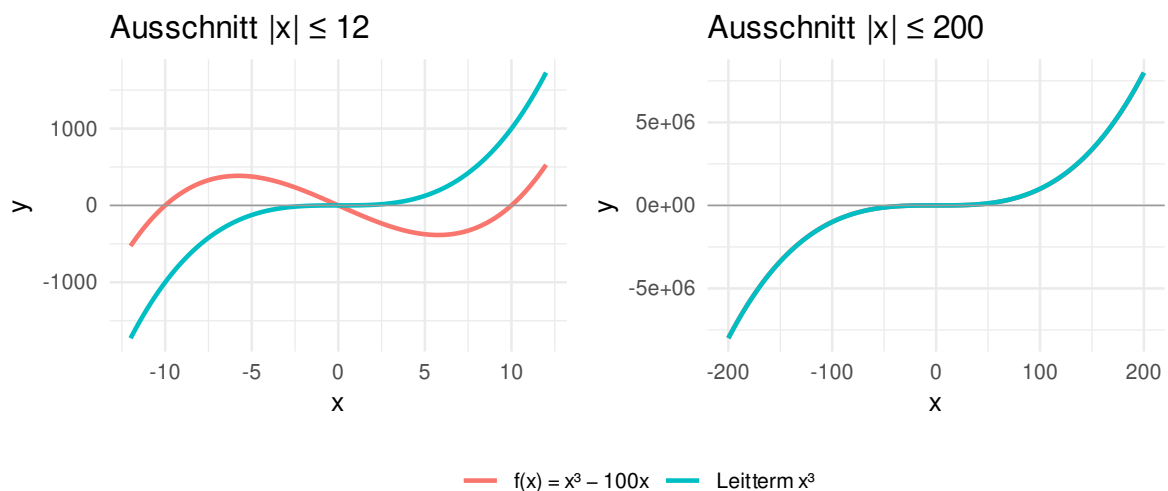


Abbildung 1: $f(x) = x^3 - 100x$ und der Leitterm x^3 . Nahe am Ursprung (links) sehen sie völlig verschieden aus — weit draußen (rechts) sind sie ununterscheidbar.

Aufgaben

Aufgabe 1

Bestimme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ für

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7$$

Aufgabe 2

Bestimme jeweils das Grenzverhalten für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$:

- a) $f(x) = -3x^4 + 2x^2$
- b) $g(x) = x^5 - 1000x^2$
- c) $h(x) = -x^7 + x^6$
- d) $k(x) = 4x^6 - x^9$

Aufgabe 3

Gib für $x \rightarrow +\infty$ an, ob die Funktion konvergiert (und wogegen) oder divergiert:

- a) $f(x) = 3^x$
- b) $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
- c) $h(x) = \ln x$
- d) $k(x) = \cos x$

Aufgabe 4

Berechne den Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

Aufgabe 5

Berechne:

- a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$
- b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

Hinweis zu b): $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$.

Aufgabe 6

Gegeben ist $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$.

- a) Für welche x ist f nicht definiert?
- b) Berechne $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.
- c) Was passiert für $x \rightarrow -2$? Begründe, warum hier *kein* endlicher Grenzwert existiert.

Aufgabe 7

Bestimme das Grenzverhalten für $x \rightarrow \pm\infty$:

$$f(x) = -10^{-6} x^7 + 10^9 x^6 - 10^{12}$$

Aufgabe 8

Berechne:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 1}{x - 1}$$

Hinweis: $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$.

Lösungen

Lösung 1

Leitterm: $2x^3$, Grad 3 (ungerade), $a_n = 2 > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Lösung 2

Es zählt jeweils nur der Leitterm:

- a) $-3x^4$: Grad gerade, Koeffizient negativ $\rightarrow -\infty$ für $x \rightarrow \pm\infty$
- b) x^5 : Grad ungerade, positiv $\rightarrow +\infty$ (rechts), $-\infty$ (links)
- c) $-x^7$: Grad ungerade, negativ $\rightarrow -\infty$ (rechts), $+\infty$ (links)
- d) Leitterm ist $-x^9$ (nicht $4x^6$!): Grad ungerade, negativ $\rightarrow -\infty$ (rechts), $+\infty$ (links)

Bei d) muss man erst nach dem höchsten Exponenten sortieren.

Lösung 3

- a) $3^x \rightarrow +\infty$: **divergiert**
 - b) $(\frac{1}{3})^x \rightarrow 0$: **konvergiert** gegen 0
 - c) $\ln x \rightarrow +\infty$: **divergiert**
 - d) $\cos x$ schwankt dauerhaft zwischen -1 und 1 : Grenzwert **existiert nicht**
-

Lösung 4

Einsetzen liefert $\frac{0}{0}$ — also faktorisieren:

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3 \quad (x \neq 3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 6$$

Lösung 5

a) $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$:

$$\frac{(x + 1)(x + 2)}{x + 1} = x + 2 \rightarrow -1 + 2 = 1$$

b) $\frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = x^2 + 2x + 4 \rightarrow 4 + 4 + 4 = 12$

Lösung 6

a) Nenner null: $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ und $x = -2$. Also $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

b) Bei $x = 2$ wird auch der Zähler null ($4 - 10 + 6 = 0$), also kürzen:

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \frac{(x - 2)(x - 3)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{x - 3}{x + 2} \quad (x \neq 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 3}{x + 2} = \frac{-1}{4} = -0,25$$

c) Bei $x = -2$ wird nur der Nenner null, der Zähler ist $4 + 10 + 6 = 20 \neq 0$. Ein Bruch mit festem Zähler und Nenner gegen 0 wächst betragsmäßig unbeschränkt — es liegt eine **Polstelle** vor, kein endlicher Grenzwert.

Lösung 7

Der Leitterm ist $-10^{-6}x^7$ — der Grad entscheidet, nicht die Größe des Koeffizienten. Grad 7 (ungerade), Koeffizient negativ:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

Der Term 10^9x^6 ist für kleine $|x|$ erdrückend groß, aber ab $|x| > 10^{15}$ hat x^7 die Oberhand. Das Verfahren ist identisch zu Aufgabe 1.

Lösung 8

Mit der angegebenen Zerlegung:

$$\frac{x^{100} - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x^{99} + x^{98} + \dots + x + 1)}{x - 1} = x^{99} + x^{98} + \dots + x + 1$$

Für $x \rightarrow 1$ wird jeder der 100 Summanden zu 1:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 1}{x - 1} = 100$$

Dasselbe Kürzen wie in Aufgabe 4 — nur mit 100 statt 2 Summanden.