Anwendungen mit Trigonometrie in der Raumgeometrie

Klasse 10

2026-03-15

Grundidee

Im rechtwinkligen Dreieck (rechter Winkel bei C, Hypotenuse c):

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

Vorgehen: Skizze zeichnen → rechtwinkliges Dreieck identifizieren → passende Formel wählen → umstellen.

In der Raumgeometrie tauchen rechtwinklige Dreiecke auf bei: - **Raumdiagonalen**: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ (Quader) - **Schrägkanten** von Pyramiden und Kegeln - **Neigungswinkeln** (Kante zur Grundfläche, Seitenfläche zur Grundfläche)

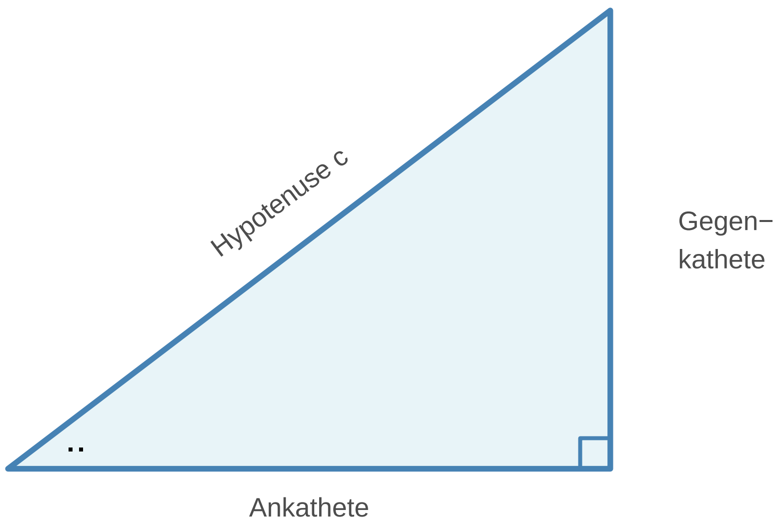

Figure 1: Rechtwinkliges Dreieck mit Beschriftung

Aufgaben

Aufgabe 1

Ein Turm wirft bei einem Sonneneinfallswinkel von 40° einen Schatten von 20 m Länge.

a) Berechne die Höhe des Turms.
b) Wie lang ist die direkte Verbindungslinie von der Turmspitze zur Schattenspitze?

Aufgabe 2

Ein Satteldach hat eine Neigung von 28° gegenüber der Horizontalen. Die Grundbreite des Hauses beträgt 10 m.

a) Berechne die Firsthöhe (von der Traufe aus).
b) Berechne die Länge einer Dachseite (Sparrenlänge).

Aufgabe 3

Ein Quader hat die Maße 6 cm × 4 cm × 3 cm.

a) Berechne die Raumdiagonale d.
b) Berechne den Winkel β, den die Raumdiagonale mit der Grundfläche einschließt.

Aufgabe 4

Ein gerader Kreiskegel hat Grundkreisradius $r = 5\,\text{cm}$ und Mantellinie $s = 13\,\text{cm}$.

a) Berechne die Höhe h.
b) Berechne Volumen und Oberfläche.
c) Berechne den halben Öffnungswinkel α an der Kegelspitze.

Aufgabe 5

Eine quadratische Pyramide hat Grundkantenlänge $a = 8\,\text{cm}$ und Höhe $h = 6\,\text{cm}$.

a) Berechne die Länge einer Schrägkante (Kante von einer Grundecke zur Spitze).
b) Berechne den Winkel, den die Schrägkante mit der Grundfläche einschließt.

Aufgabe 6 *(absurd)*

Auf dem Mond misst ein Turm einen Schattenwurf von 300 m. Der Einfallswinkel der Sonne beträgt 0,5°.

a) Berechne die Turmhöhe.
b) Vergleiche mit der Höhe des Kölner Doms (157 m).

(Das Vorgehen ist identisch zu Aufgabe 1 — nur der Winkel ist extrem klein.)

Aufgabe 7 *(absurd)*

Ein Würfel hat Kantenlänge a.

a) Leite eine Formel für die Raumdiagonale d in Abhängigkeit von a her.
b) Berechne den Winkel β, den die Raumdiagonale mit der Grundfläche einschließt. Zeige, dass dieser Winkel unabhängig von a ist.
c) Berechne den Winkel für $a = 1000\,\text{km}$.

(Das Vorgehen ist identisch zu Aufgabe 3.)

Lösungen

Lösung 1

a) Turmhöhe h, Schatten 20 m, Winkel 40°:

$$\tan(40°) = \frac{h}{20} \quad \Rightarrow \quad h = 20 \cdot \tan(40°) \approx 20 \cdot 0{,}839 \approx 16{,}8\,\text{m}$$

b) Hypotenuse (Verbindungslinie Spitze–Schattenende):

$$c = \frac{20}{\cos(40°)} \approx \frac{20}{0{,}766} \approx 26{,}1\,\text{m}$$

Lösung 2

Das Dreieck hat die halbe Grundbreite 5 m als Ankathete (von der Traufe zur Firstlinie) und Neigung 28°.

a) $h = 5 \cdot \tan(28°) \approx 5 \cdot 0{,}532 \approx 2{,}66\,\text{m}$
b) Sparrenlänge (Hypotenuse): $s = \dfrac{5}{\cos(28°)} \approx \dfrac{5}{0{,}883} \approx 5{,}66\,\text{m}$

Lösung 3

a) Grundflächendiagonale: $d_G = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}\,\text{cm}$

Raumdiagonale: $d = \sqrt{d_G^2 + 3^2} = \sqrt{52 + 9} = \sqrt{61} \approx 7{,}81\,\text{cm}$

b) Die Raumdiagonale bildet mit der Grundfläche das rechtwinklige Dreieck mit Ankathete d_G und Höhe 3 cm:

$$\tan\beta = \frac{3}{2\sqrt{13}} \quad \Rightarrow \quad \beta = \arctan\left(\frac{3}{2\sqrt{13}}\right) \approx \arctan(0{,}416) \approx 22{,}6°$$

Lösung 4

a) $s^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12\,\text{cm}$

b) $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 100\pi \approx 314{,}2\,\text{cm}^3$

$O = \pi \cdot 5^2 + \pi \cdot 5 \cdot 13 = 25\pi + 65\pi = 90\pi \approx 282{,}7\,\text{cm}^2$

c) Im Querschnitt: rechtwinkliges Dreieck mit Gegenkathete $r = 5$ und Hypotenuse $s = 13$:

$$\sin\alpha = \frac{r}{s} = \frac{5}{13} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arcsin\left(\frac{5}{13}\right) \approx 22{,}6°$$

Halber Öffnungswinkel $\approx 22{,}6°$, voller Öffnungswinkel $\approx 45{,}2°$.

Lösung 5

a) Abstand einer Grundecke zur Mitte der Grundfläche (halbe Grundflächendiagonale):

$$e = \frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}\,\text{cm}$$

Schrägkante (Hypotenuse aus e und h):

$$k = \sqrt{e^2 + h^2} = \sqrt{32 + 36} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17} \approx 8{,}25\,\text{cm}$$

b) Die Schrägkante liegt über der Strecke e in der Grundfläche:

$$\tan\gamma = \frac{h}{e} = \frac{6}{4\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \arctan\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right) \approx \arctan(1{,}061) \approx 46{,}7°$$

Lösung 6

a) $h = 300 \cdot \tan(0{,}5°) \approx 300 \cdot 0{,}008727 \approx 2{,}62\,\text{m}$

b) Der Turm wäre nur etwa 2,6 m hoch — ein Gartentor, kein Kölner Dom.

Der extrem flache Winkel macht den Schatten unverhältnismäßig lang: dieselbe Rechenmethode wie Aufgabe 1, aber $\tan(0{,}5°) \approx 0{,}0087$ statt $\tan(40°) \approx 0{,}84$.

Lösung 7

a) Grundflächendiagonale: $d_G = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

Raumdiagonale: $d = \sqrt{d_G^2 + a^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$

b) Winkel zur Grundfläche:

$$\tan\beta = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \beta = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 35{,}26°$$

Der Winkel ist für jeden Würfel gleich — a kürzt sich heraus.

c) Für $a = 1000\,\mathrm{km}$: exakt derselbe Winkel, $\beta \approx 35{,}26°$.