# Pyramide, Kegel, Zylinder und Kugel

**Klasse 10**

2026-03-15

### Grundidee

| Körper | Volumen | Oberfläche |
|---|---|---|
| **Zylinder** | $V = \pi r^2 h$ | $O = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ |
| **Kegel** | $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ | $O = \pi r^2 + \pi r s,\ \ s = \sqrt{r^2 + h^2}$ |
| **Pyramide** (quadr. Basis) | $V = \frac{1}{3} a^2 h$ | $O = a^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot h_s}{2},$ $h_s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ |
| **Kugel** | $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ | $O = 4\pi r^2$ |

- $r$: Grundkreisradius; $h$: senkrechte Höhe; $s$: Mantellinie (Kegel); $h_s$: Höhe der Seitendreiecke (Pyramide); $a$: Grundkantenlänge
- Kegel und Pyramide: Volumen $= \frac{1}{3} \times$ Grundfläche $\times$ Höhe

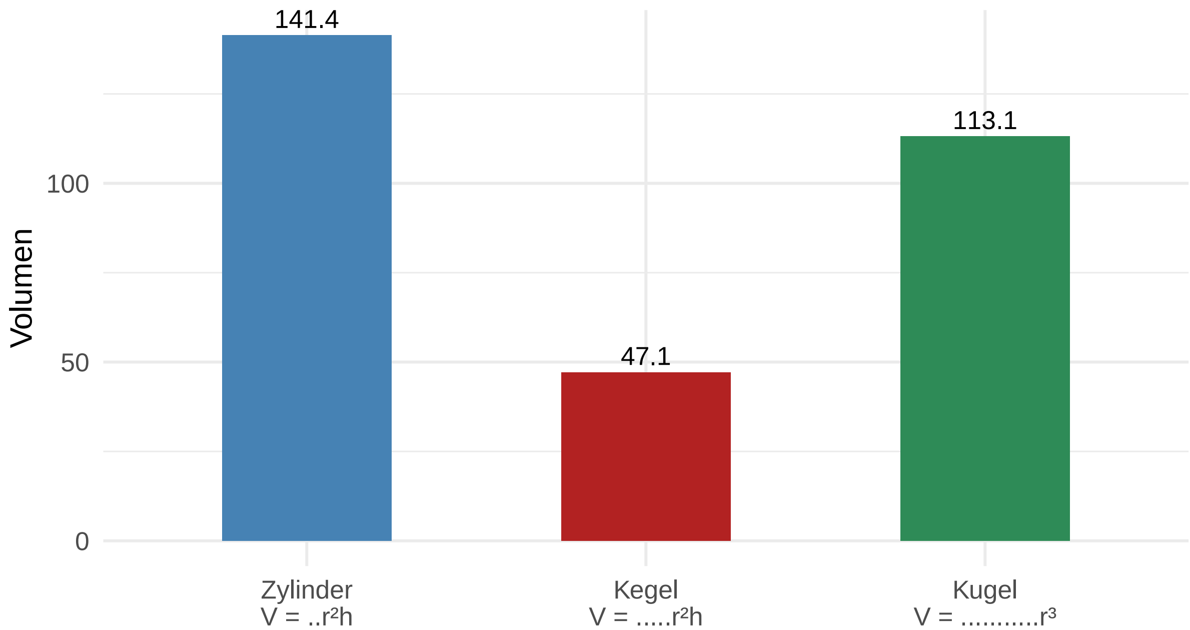


Figure 1: Volumenvergleich: Zylinder, Kegel und Kugel bei r = 3, h = 5

## Aufgaben

### Aufgabe 1

Ein Zylinder hat Grundkreisradius $r = 3\,\text{cm}$ und Höhe $h = 5\,\text{cm}$.

a) Berechne das Volumen.
b) Berechne die Oberfläche.

---

### Aufgabe 2

Eine Kugel hat den Radius $r = 4\,\text{cm}$.

a) Berechne das Volumen.
b) Berechne die Oberfläche.
c) Um welchen Faktor steigen $V$ und $O$, wenn der Radius verdoppelt wird?

---

### Aufgabe 3

Ein gerader Kreiskegel hat Grundkreisradius $r = 4\,\text{cm}$ und Höhe $h = 3\,\text{cm}$.

a) Berechne die Mantellinie $s$.
b) Berechne das Volumen und die Oberfläche.

---

### Aufgabe 4

Eine quadratische Pyramide hat die Grundkantenlänge $a = 6\,\text{cm}$ und die Höhe $h = 4\,\text{cm}$.

a) Berechne die Höhe $h_s$ der Seitendreiecke.
b) Berechne Volumen und Oberfläche.

---

### Aufgabe 5

Ein Körper besteht aus einem Zylinder ($r = 3\,\text{cm}$, $h = 8\,\text{cm}$), auf dem ein Kegel ($r = 3\,\text{cm}$, $h = 4\,\text{cm}$) aufgesetzt ist.

a) Berechne das Gesamtvolumen.
b) Berechne die sichtbare Oberfläche (Grundkreis des Zylinders + Mantel des Zylinders + Mantel des Kegels).

---

**Aufgabe 6** *(absurd)*

Gesucht ist eine Kugel, bei der Volumen und Oberfläche numerisch denselben Wert haben (gleiche Zahl, unabhängig von Einheiten).

Für welchen Radius $r$ gilt $V = O$?

*(Das Vorgehen ist identisch zu Aufgabe 2 — nur wird die Gleichung aufgelöst statt eingesetzt.)*

---

**Aufgabe 7** *(absurd)*

Ein Zylinder hat die Eigenschaft $h = 2r$ (Höhe ist doppelter Radius). Sein Volumen beträgt $V = 1\,000\pi\,\text{cm}^3$.

a) Berechne $r$ und $h$.
b) Berechne die Oberfläche.

*(Das Vorgehen ist identisch zu Aufgabe 1 — der Ausdruck für h wird nur zusätzlich eingesetzt.)*

---

## Lösungen

**Lösung 1**

a) $V = \pi \cdot 3^2 \cdot 5 = 45\pi \approx 141{,}4\,\text{cm}^3$

b) $O = 2\pi \cdot 3^2 + 2\pi \cdot 3 \cdot 5 = 18\pi + 30\pi = 48\pi \approx 150{,}8\,\text{cm}^2$

---

**Lösung 2**

a) $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 = \frac{256\pi}{3} \approx 268{,}1\,\text{cm}^3$

b) $O = 4\pi \cdot 4^2 = 64\pi \approx 201{,}1\,\text{cm}^2$

c) Radius $r \to 2r$:

$$V' = \frac{4}{3}\pi(2r)^3 = 8 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = 8V \quad \Rightarrow \quad \text{Faktor } 8$$

$$O' = 4\pi(2r)^2 = 4 \cdot 4\pi r^2 = 4O \quad \Rightarrow \quad \text{Faktor } 4$$

---

**Lösung 3**

a) $s = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5\,\text{cm}$

 

b) $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 3 = 16\pi \approx 50{,}3\,\text{cm}^3$

$O = \pi \cdot 4^2 + \pi \cdot 4 \cdot 5 = 16\pi + 20\pi = 36\pi \approx 113{,}1\,\text{cm}^2$

---

**Lösung 4**

a) $h_s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5\,\text{cm}$

b) $V = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 4 = \frac{1}{3} \cdot 144 = 48\,\text{cm}^3$

Mantelfläche: $4 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 60\,\text{cm}^2$

$O = 6^2 + 60 = 36 + 60 = 96\,\text{cm}^2$

---

**Lösung 5**

a) $V_{\text{Zyl}} = \pi \cdot 3^2 \cdot 8 = 72\pi$

$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi$

$V_{\text{ges}} = 84\pi \approx 263{,}9\,\text{cm}^3$

b) Mantellinie des Kegels: $s = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\,\text{cm}$

$O = \underbrace{\pi \cdot 3^2}_{\text{Grundkreis}} + \underbrace{2\pi \cdot 3 \cdot 8}_{\text{Zyl.-Mantel}} + \underbrace{\pi \cdot 3 \cdot 5}_{\text{Kegel-Mantel}}$

$= 9\pi + 48\pi + 15\pi = 72\pi \approx 226{,}2\,\text{cm}^2$

---

**Lösung 6**

$$V = O \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^2$$

Dividieren durch $4\pi r^2$ (für $r > 0$):

$$\frac{r}{3} = 1 \quad \Rightarrow \quad r = 3$$

Bei $r = 3$ gilt numerisch $V = O = 36\pi$.

---

**Lösung 7**

a) $h = 2r$ einsetzen:

$$V = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3 = 1\,000\pi$$

$$r^3 = 500 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{500} \approx 7{,}94\,\mathrm{cm}$$

$$h = 2r \approx 15{,}87\,\mathrm{cm}$$

b) $O = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 2r = 2\pi r^2 + 4\pi r^2 = 6\pi r^2$

$$O = 6\pi \cdot 500^{2/3} \approx 6\pi \cdot 63{,}0 \approx 1\,187\,\mathrm{cm}^2$$