

Ganzrationale Funktionen und Potenzfunktionen

Klasse 10

2026-03-15

Grundidee

Eine **ganzrationale Funktion** (Polynom) ist eine Summe von Potenzfunktionen:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

- **Grad n** : höchste vorkommende Potenz (mit Koeffizient $\neq 0$)
- **Leitkoeffizient a_n** : Koeffizient der höchsten Potenz
- Keine negativen Exponenten, keine Wurzeln — nur ganzzahlige Potenzen ≥ 0
- **Auswerten**: $f(c)$ durch Einsetzen von $x = c$ berechnen

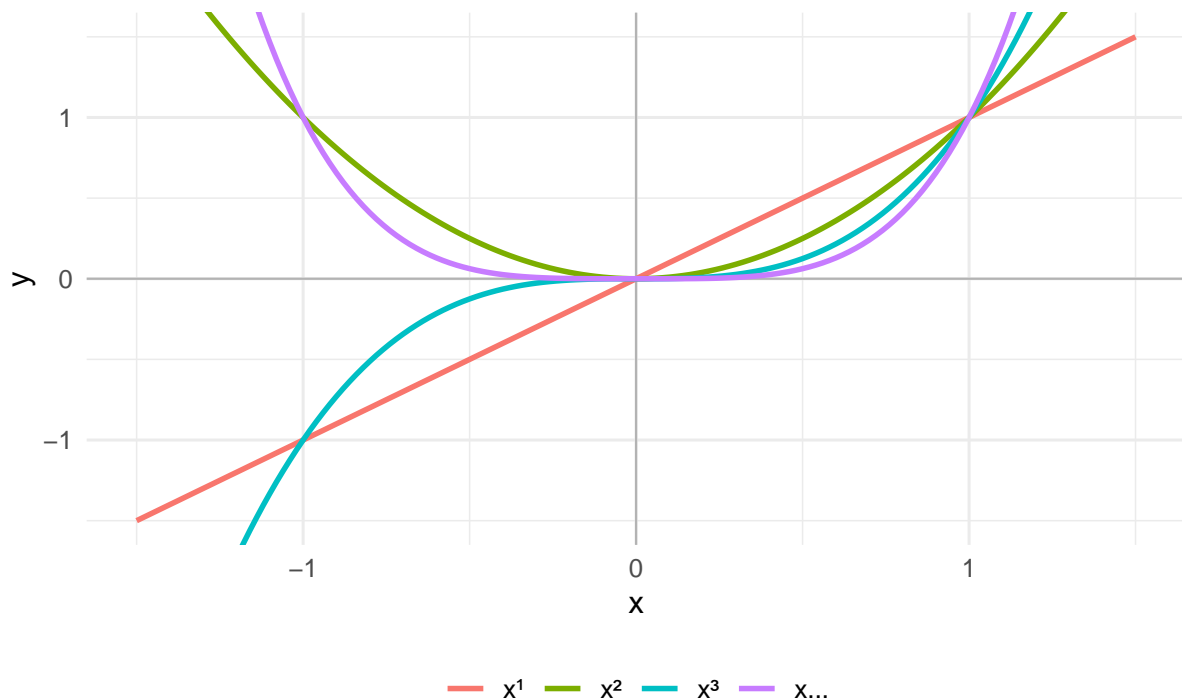


Figure 1: Potenzfunktionen x^n für verschiedene Grade

Aufgaben

Aufgaben

Aufgabe 1

Bestimme Grad und Leitkoeffizient von $f(x) = 4x^3 - 2x + 7$.

Aufgabe 2

Gegeben ist $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$.

- Berechne $f(2)$ und $f(-1)$.
 - Für welches x gilt $f(0)$? (*Lies den Wert direkt ab.*)
-

Aufgabe 3

Entscheide jeweils mit Begründung, ob es sich um eine ganzrationale Funktion handelt:

- $f(x) = 3x^4 - \sqrt{x} + 2$
 - $g(x) = x^3 - \frac{1}{x} + 5$
 - $h(x) = 5x^2 - x + \pi$
 - $k(x) = x^{-2} + 3x$
-

Aufgabe 4

Gegeben ist $f(x) = ax^3 + bx^2 - x + 4$. Bestimme a und b aus den Bedingungen $f(1) = 7$ und $f(-1) = 1$.

Aufgabe 5

Beschreibe das Verhalten von $f(x) = -2x^4 + 100x^2 - 500$ für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$.

Hinweis: Nur der Leitterm ist für das Grenzverhalten entscheidend.

Aufgabe 6 (absurd)

Gegeben ist $f(x) = x^{1001} - x^{999} + x^2 - 1$.

- Bestimme Grad und Leitkoeffizient.
 - Berechne $f(1)$ und $f(-1)$.
 - Was ergibt $f(0)$?
-

Lösungen

Aufgabe 7 (absurd)

Gegeben ist $f(x) = (x^2 - 1)^{50} + x$.

- Bestimme Grad und Leitkoeffizient, **ohne** auszumultiplizieren.
 - Welchen Wert hat $f(0)$?
 - Handelt es sich um eine ganzrationale Funktion? Begründe.
-

Lösungen

Lösung 1

Höchste Potenz ist x^3 mit Koeffizient 4:

$$\text{Grad} = 3, \quad \text{Leitkoeffizient} = 4$$

Lösung 2

a) $f(2) = 8 - 12 + 4 - 1 = -1$

$$f(-1) = -1 - 3 - 2 - 1 = -7$$

b) $f(0) = 0 - 0 + 0 - 1 = -1$ — der konstante Term a_0 ist direkt der Funktionswert bei $x = 0$.

Lösung 3

a) **Nein** — $\sqrt{x} = x^{1/2}$ ist kein ganzzahliger Exponent.

b) **Nein** — $\frac{1}{x} = x^{-1}$ hat negativen Exponenten.

c) **Ja** — π ist nur eine reelle Konstante; alle Exponenten $(2, 1, 0)$ sind nichtnegative ganze Zahlen.

d) **Nein** — x^{-2} hat negativen Exponenten.

Lösung 4

Einsetzen:

$$f(1) = a + b - 1 + 4 = a + b + 3 = 7 \quad \Rightarrow \quad a + b = 4 \quad (\text{I})$$

$$f(-1) = -a + b + 1 + 4 = -a + b + 5 = 1 \quad \Rightarrow \quad -a + b = -4 \quad (\text{II})$$

Lösungen

(I) + (II): $2b = 0 \Rightarrow b = 0$; aus (I): $a = 4$.

$$f(x) = 4x^3 - x + 4$$

Lösung 5

Leitterm: $-2x^4$. Da Grad 4 (gerade) und Leitkoeffizient $-2 < 0$:

$$x \rightarrow +\infty : f(x) \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow -\infty : f(x) \rightarrow -\infty$$

Der Graph verläuft auf beiden Seiten nach unten (wie $-x^4$).

Lösung 6

a) Höchste Potenz x^{1001} : Grad = 1001, Leitkoeffizient = 1.

b) $f(1) = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$

$f(-1) = -1 + 1 + 1 - 1 = 0$

c) $f(0) = 0 - 0 + 0 - 1 = -1$

Lösung 7

a) $(x^2 - 1)^{50}$ hat als höchsten Term $(x^2)^{50} = x^{100}$ mit Leitkoeffizient 1.

Das addierte x ändert den Grad nicht:

$$\text{Grad} = 100, \quad \text{Leitkoeffizient} = 1$$

b) $f(0) = (0 - 1)^{50} + 0 = (-1)^{50} = 1$

c) **Ja** — $(x^2 - 1)^{50}$ ist ein Produkt von Polynomen, also selbst ein Polynom; $+x$ ändert das nicht. Alle entstehenden Exponenten sind nichtnegative ganze Zahlen.