Polynomdarstellung und Grad

Klasse 10

2026-03-15

Grundidee

Faktorform Normalform:

- **Ausmultiplizieren**: Faktorform $(x - x_1)(x - x_2)\cdots \to$ Normalform $a_n x^n + \cdots + a_0$
- **Faktorisieren**: Normalform $\to$ Faktorform (nach Nullstellenbestimmung)

Polynom aus Nullstellen aufstellen:

$$f(x) = a \cdot (x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \cdots$$

Leitkoeffizient a aus einer zusätzlichen Bedingung (z.B. $f(0) =$ ... oder gegebener Wert) bestimmen.

Grad:

- $\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$
- $\deg(f + g) \leq \max(\deg f,\ \deg g)$

Koeffizientenvergleich: Gilt $f(x) = g(x)$ für alle x, so sind alle Koeffizienten gleich.

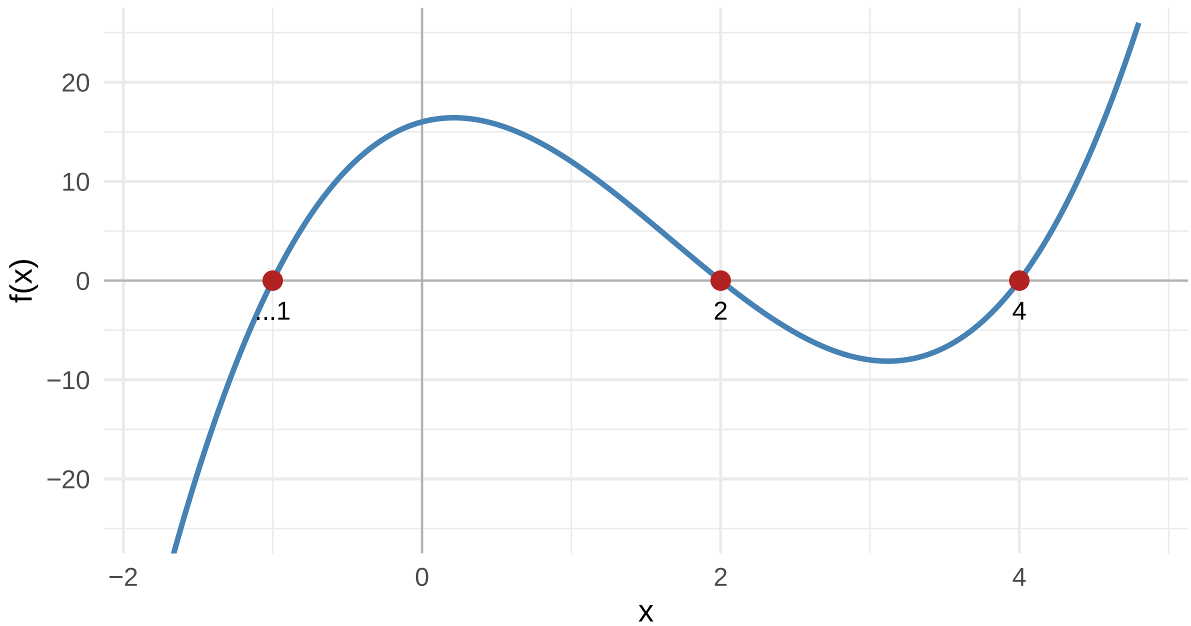

Figure 1: f(x) = 2(x+1)(x−2)(x−4) — Nullstellen aus Faktorform direkt ablesbar

Aufgaben

Aufgabe 1

Multipliziere aus und gib die Normalform an:

$$f(x) = (x+2)(x-1)(x-3)$$

Aufgabe 2

Multipliziere aus:

$$f(x) = (3x-1)(2x^2+x-1)$$

Aufgabe 3

Stelle ein Polynom 3. Grades mit den Nullstellen $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$ und Leitkoeffizient 3 auf.

Aufgabe 4

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 12$ hat Nullstellen bei $x = 2$ und $x = -2$.

a) Stelle ein Gleichungssystem für a und b auf.
b) Löse es und gib $f(x)$ vollständig an.

Aufgabe 5

Faktorisiere vollständig und bestimme alle reellen Nullstellen:

$$f(x) = (x^2-4)(x^2-9)$$

Aufgabe 6 *(absurd)*

Stelle ein Polynom 4. Grades auf, das genau die Nullstellen $x = \pm 3$ und $x = \pm 7$ (alle einfach) hat und den Wert $f(0) = 441$ besitzt.

Aufgabe 7 *(absurd)*

Gegeben ist $f(x) = (x^5 - 1)(x^5 + 1)$.

a) Bestimme Grad und Leitkoeffizient **ohne** auszumultiplizieren.
b) Berechne $f(1)$ und $f(-1)$.
c) Ist $x = 1$ eine Nullstelle? Mit welcher Vielfachheit?

Lösungen

Lösung 1

Erst die letzten beiden Klammern:

$$(x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$$

Dann mit $(x+2)$:

$$(x+2)(x^2-4x+3) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2x^2 - 8x + 6 = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

$$\boxed{f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$$

Lösung 2

$$(3x-1)(2x^2+x-1)$$

$$= 3x \cdot (2x^2+x-1) - 1 \cdot (2x^2+x-1)$$

$$= 6x^3 + 3x^2 - 3x - 2x^2 - x + 1$$

$$\boxed{f(x) = 6x^3 + x^2 - 4x + 1}$$

Lösung 3

Faktorform: $f(x) = 3 \cdot x \cdot (x-2)(x+1)$

Ausmultiplizieren: $(x-2)(x+1) = x^2 - x - 2$

$$f(x) = 3x(x^2-x-2) = 3x^3 - 3x^2 - 6x$$

Lösung 4

a) $f(2) = 0$:
$$8 + 4a + 2b - 12 = 0 \;\Rightarrow\; 4a + 2b = 4 \;\Rightarrow\; 2a + b = 2 \tag{I}$$

$f(-2) = 0$:
$$-8 + 4a - 2b - 12 = 0 \;\Rightarrow\; 4a - 2b = 20 \;\Rightarrow\; 2a - b = 10 \tag{II}$$

b) $(I) + (II)$: $4a = 12 \Rightarrow a = 3$; aus (I): $b = 2 - 6 = -4$.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$$

Probe (Faktorisieren): $f(x) = x^2(x+3) - 4(x+3) = (x^2 - 4)(x+3) = (x-2)(x+2)(x+3)$

Lösung 5

Faktorisieren:

$$(x^2 - 4)(x^2 - 9) = (x - 2)(x + 2)(x - 3)(x + 3)$$

Nullstellen: $x_{1,2} = \pm 2, \quad x_{3,4} = \pm 3$

$$\mathbb{L} = \{-3,\ -2,\ 2,\ 3\}$$

Lösung 6

Faktorform: $f(x) = a(x - 3)(x + 3)(x - 7)(x + 7) = a(x^2 - 9)(x^2 - 49)$

Bedingung $f(0) = 441$:

$$a \cdot (-9) \cdot (-49) = 441 \;\Rightarrow\; 441a = 441 \;\Rightarrow\; a = 1$$

$$f(x) = (x^2 - 9)(x^2 - 49) = x^4 - 58x^2 + 441$$

Das Vorgehen ist identisch zu Aufgabe 3 — nur mit anderen Nullstellen und einer Normierungsbedingung.

Lösung 7

a) $\deg(x^5 - 1) = 5$, $\deg(x^5 + 1) = 5$, also $\deg(f) = 5 + 5 = 10$.

Leitterm: $x^5 \cdot x^5 = x^{10}$, Leitkoeffizient $= 1$.

b) $f(1) = (1-1)(1+1) = 0 \cdot 2 = 0$

$f(-1) = ((-1)^5 - 1)((-1)^5 + 1) = (-2)(0) = 0$

c) Ja, $x = 1$ ist Nullstelle. Im ersten Faktor: $x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$, also tritt $(x-1)$ genau einmal auf — Vielfachheit **1**.

