Nullstellen, Symmetrie und Kurvendiskussion

Klasse 10

2026-03-15

Grundidee

Nullstellen ($f(x) = 0$ lösen):

- Ausklammern, Substitution oder Mitternachtsformel
- **Vielfachheit** k bei Nullstelle x_0: $f(x) = (x - x_0)^k \cdot ...$
  - k ungerade $\to$ Vorzeichenwechsel (Graph schneidet x-Achse)
  - k gerade $\to$ kein Vorzeichenwechsel (Graph berührt x-Achse)

Symmetrie (Probe: $-x$ einsetzen):

- $f(-x) = f(x)$: **achsensymmetrisch** zur y-Achse (nur gerade Potenzen)
- $f(-x) = -f(x)$: **punktsymmetrisch** zum Ursprung (nur ungerade Potenzen)

Grenzverhalten (nur Leitterm $a_n x^n$ zählt):

a_n	n gerade	n ungerade
> 0	$f \to +\infty$ beidseitig	$f \to -\infty$ links, $+\infty$ rechts
< 0	$f \to -\infty$ beidseitig	$f \to +\infty$ links, $-\infty$ rechts

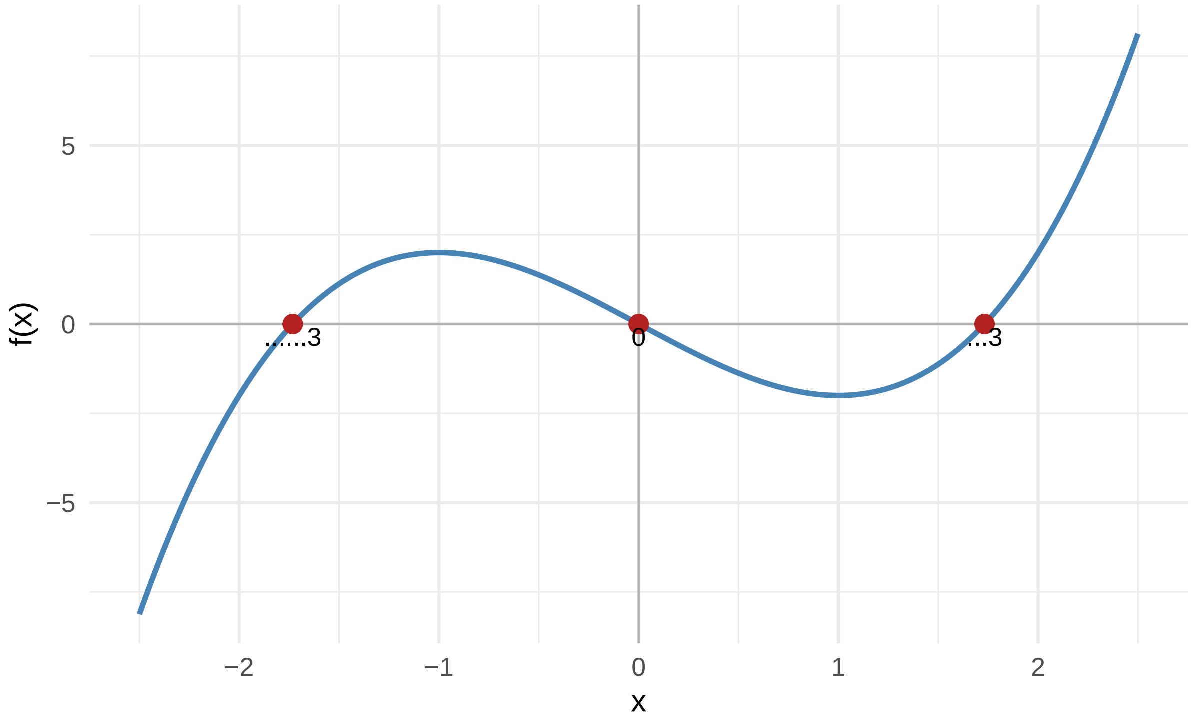

Figure 1: $f(x) = x^3 - 3x$ mit Nullstellen und Grenzverhalten

---

Aufgaben

Aufgabe 1

Bestimme alle Nullstellen von $f(x) = x^3 - 3x$.

Aufgabe 2

Bestimme alle Nullstellen von $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ durch Substitution.

Aufgabe 3

Untersuche jeweils die Symmetrie (mit Probe $f(-x)$):

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$
b) $g(x) = x^5 - 2x^3 + x$
c) $h(x) = x^3 + x^2$

Aufgabe 4

Führe eine vollständige Kurvendiskussion für $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ durch:

a) Symmetrie untersuchen
b) Nullstellen bestimmen
c) Verhalten für $x \to \pm\infty$ angeben
d) Skizziere den Graphen (grob).

Aufgabe 5

Eine ganzrationale Funktion 3. Grades hat die Nullstellen $x_1 = -2$ (doppelt) und $x_2 = 1$ (einfach), Leitkoeffizient 1.

a) Stelle den Funktionsterm auf.
b) Beschreibe das Verhalten des Graphen an den Nullstellen (schneidet / berührt).

Aufgabe 6 *(absurd)*

Bestimme alle reellen Nullstellen von $f(x) = x^{200} - x^{100}$ durch Substitution.

Aufgabe 7 *(absurd)*

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Betrachte $f(x) = x^{2n+1} - x$.

a) Welche Symmetrie hat f?
b) Bestimme alle reellen Nullstellen in Abhängigkeit von n.
c) Wie viele Nullstellen hat f insgesamt?

Lösungen

Lösung 1

Ausklammern: $f(x) = x(x^2 - 3) = 0$

$$x_1 = 0, \qquad x^2 = 3 \;\Rightarrow\; x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$$

$$\mathbb{L} = \{-\sqrt{3},\ 0,\ \sqrt{3}\}$$

Lösung 2

Substitution $u = x^2$ $(u \geq 0)$:

$$u^2 - 5u + 4 = 0 \;\Rightarrow\; (u-1)(u-4) = 0 \;\Rightarrow\; u_1 = 1,\; u_2 = 4$$

Resubstitution:

$$x^2 = 1 \;\Rightarrow\; x = \pm 1 \qquad x^2 = 4 \;\Rightarrow\; x = \pm 2$$

$$\mathbb{L} = \{-2,\; -1,\; 1,\; 2\}$$

Lösung 3

a) $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 1 = x^4 - 3x^2 + 1 = f(x)$

$\rightarrow$ **achsensymmetrisch** zur y-Achse

b) $g(-x) = (-x)^5 - 2(-x)^3 + (-x) = -x^5 + 2x^3 - x = -(x^5 - 2x^3 + x) = -g(x)$

$\rightarrow$ **punktsymmetrisch** zum Ursprung

c) $h(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 = -x^3 + x^2$

$-x^3 + x^2 \neq h(x)$ und $-x^3 + x^2 \neq -h(x)$

$\rightarrow$ **keine Symmetrie**

Lösung 4

a) $f(-x) = -x^3 - x^2 + 2x \neq \pm f(x)$ $\rightarrow$ **keine Symmetrie**

b) Ausklammern: $f(x) = x(x^2 - x - 2) = x(x-2)(x+1)$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -1$$

Alle Nullstellen einfach $\rightarrow$ Graph schneidet die x-Achse jeweils.

c) Leitterm x^3 ($a_3 = 1 > 0$, Grad ungerade):

$$x \to -\infty:\; f(x) \to -\infty \qquad x \to +\infty:\; f(x) \to +\infty$$

d) Skizze: Graph kommt von unten links, schneidet bei -1, überquert 0, schneidet bei 2 und zieht nach oben rechts.

Lösung 5

a) Faktorform: $f(x) = (x+2)^2(x-1)$

Ausmultiplizieren: $(x^2+4x+4)(x-1) = x^3+3x^2-4$

b) Bei $x_1 = -2$ (doppelte NS, $k=2$ gerade): Graph **berührt** die x-Achse.

Bei $x_2 = 1$ (einfache NS, $k=1$ ungerade): Graph **schneidet** die x-Achse.

Lösung 6

Ausklammern: $f(x) = x^{100}(x^{100}-1) = 0$

- $x^{100} = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0$ (100-fache Nullstelle)
- $x^{100} = 1 \;\Rightarrow\; x_{2,3} = \pm 1$

$$\mathbb{L} = \{-1,\ 0,\ 1\}$$

An $x=0$: Vielfachheit 100 (gerade) $\to$ Graph **berührt** die x-Achse. An $x=\pm 1$: Vielfachheit 1 $\to$ Graph **schneidet**.

Lösung 7

a) $f(-x) = (-x)^{2n+1} - (-x) = -x^{2n+1} + x = -(x^{2n+1} - x) = -f(x)$

$\to$ **punktsymmetrisch** zum Ursprung für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Ausklammern: $f(x) = x(x^{2n}-1) = 0$

- $x = 0$
- $x^{2n} = 1$: Da $2n$ gerade, gilt $x^{2n} \geq 0$, und es folgt $x = \pm 1$.

$$\mathbb{L} = \{-1,\ 0,\ 1\} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

c) Genau **3** reelle Nullstellen — unabhängig von n.

