Transformationen der Sinusfunktion

Klasse 10

2026-03-15

Grundidee

Die allgemeine Form der transformierten Sinusfunktion ist:

$$f(x) = a \cdot \sin(b(x + c)) + d$$

Parameter	Bedeutung	Berechnung
$\|a\|$	**Amplitude** (halbe Schwingungsbreite)	$a = \frac{\text{Max}-\text{Min}}{2}$
b	bestimmt die **Periode**	$T = \frac{2\pi}{\|b\|}$
c	**Phasenverschiebung** (nach links für $c > 0$)	aus Anfangsbedingung
d	**Mittellage** (vertikale Verschiebung)	$d = \frac{\text{Max}+\text{Min}}{2}$

Vorzeichen: $a < 0$ bedeutet Spiegelung an der Mittellage $y = d$.

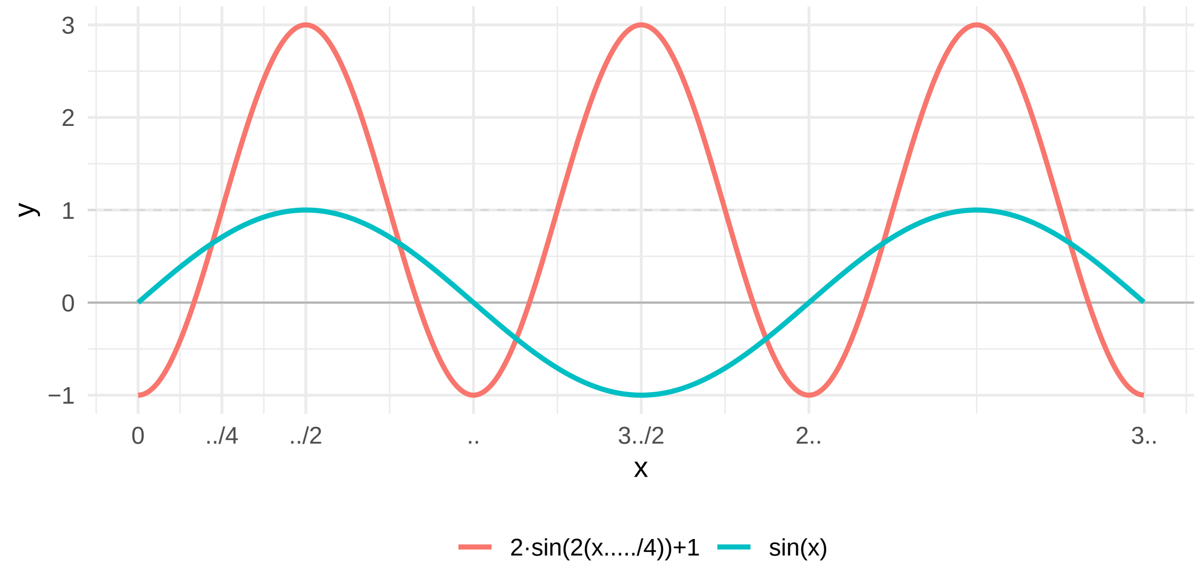

Figure 1: sin(x) und f(x) = 2 · sin(2(x − /4)) + 1 im Vergleich

Aufgaben

Aufgabe 1

Bestimme Amplitude und Periode von $f(x) = 3 \cdot \sin(2x)$.

Aufgabe 2

Bestimme alle Parameter ($|a|$, T, c, d, Wertebereich) von:

$$f(x) = -\sin(x) + 2$$

Aufgabe 3

Bestimme alle Parameter von:

$$f(x) = 4 \cdot \cos(3x - \pi)$$

Hinweis: Forme erst auf die Form $a \cdot \cos(b(x + c)) + d$ um.

Aufgabe 4

Bestimme alle Parameter von:

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{3}\right) - 2$$

Aufgabe 5

Stelle den Funktionsterm auf: Der Graph ist eine Sinusfunktion mit Amplitude 5, Periode 4π, Mittellage $y = 3$ und ohne Phasenverschiebung.

Aufgabe 6

Bestimme den maximalen und minimalen Wert sowie die Periode von:

$$f(x) = -3 \cdot \cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) + 1$$

Bestimme außerdem ein x_0, bei dem f ihr Maximum annimmt.

Aufgabe 7

Bestimme Amplitude, Periode und Mittellage von:

$$f(x) = 0{,}001 \cdot \sin\left(1000\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right) - 99$$

Aufgabe 8

Bestimme Amplitude, Periode und Mittellage von:

$$f(x) = 200 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{365} x - \frac{\pi}{2}\right) + 10$$

Gib außerdem an: Bei welchem $x > 0$ nimmt f erstmals ihr Maximum an? Welche reale Größe könnte x bedeuten (Einheit: Tage)?

Lösungen

Lösung 1

$a = 3$, $b = 2$:

$$|a| = 3 \quad \Rightarrow \quad \text{Amplitude} = 3 \qquad T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

Lösung 2

$f(x) = (-1) \cdot \sin(x) + 2$: also $a = -1$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 2$.

- Amplitude: $|a| = 1$
- Periode: $T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$
- Mittellage: $y = 2$
- Vorzeichen $a < 0$: Spiegelung $\rightarrow$ Maximum wo sin Minimum hat
- Wertebereich: $[2-1, 2+1] = [1, 3]$

Lösung 3

Umformen: $3x - \pi = 3\big(x - \frac{\pi}{3}\big)$, also $b = 3$, $c = -\frac{\pi}{3}$, $d = 0$.

- Amplitude: $|a| = 4$
- Periode: $T = \frac{2\pi}{3}$
- Phasenverschiebung: $\frac{\pi}{3}$ nach rechts
- Mittellage: $y = 0$, Wertebereich $[-4, 4]$

Lösung 4

Umformen: $\pi x + \frac{\pi}{3} = \pi\big(x + \frac{1}{3}\big)$, also $b = \pi$, $c = \frac{1}{3}$, $d = -2$.

- Amplitude: $|a| = \frac{1}{2}$
- Periode: $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$
- Phasenverschiebung: $\frac{1}{3}$ nach links
- Mittellage: $y = -2$, Wertebereich $[-2{,}5,\ -1{,}5]$

Lösung 5

Gesucht: $a = 5$, $T = 4\pi$ (also $b = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$), $d = 3$, $c = 0$.

$$f(x) = 5 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\,x\right) + 3$$

Lösung 6

$a = -3$, $b = 2$, $c = \frac{\pi}{4}$, $d = 1$.

- Periode: $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$
- Mittellage: $y = 1$
- Wertebereich: $[1-3, 1+3] = [-2, 4]$

Da $a < 0$: Maximum dort, wo $\cos(2(x + \frac{\pi}{4})) = -1$, also:

$$2\Big(x + \frac{\pi}{4}\Big) = \pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4}$$

Maximum: $f(\frac{\pi}{4}) = 4$

Lösung 7

$a = 0{,}001$, $b = 1000$, $d = -99$.

- Amplitude: 0,001
- Periode: $T = \frac{2\pi}{1000} \approx 0{,}006$
- Mittellage: $y = -99$

Das Verfahren ist identisch zu Aufgabe 1 — lediglich die Zahlen sind ungewöhnlich.

Lösung 8

$a = 200$, $b = \frac{2\pi}{365}$, $d = 10$.

- Amplitude: 200
- Periode: $T = \frac{2\pi}{2\pi/365} = 365$ (Tage)
- Mittellage: $y = 10$

Maximum bei $\cos(...) = 1$:

$$\frac{2\pi}{365}x - \frac{\pi}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{365}{4} \approx 91{,}25 \text{ Tage}$$

Das ist etwa der **21. März** — Frühlingsanfang. Die Funktion könnte z.B. die Tageslänge oder Sonneneinstrahlung über das Jahr modellieren.

