Sinus und Kosinus als periodische Funktionen

Klasse 10

2026-03-15

Grundidee

Die Funktionen $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \cos(x)$ sind **periodische** Funktionen mit Periode 2π.

	$\sin(x)$	$\cos(x)$
Definitionsmenge	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Wertemenge	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$
Periode	2π	2π
Nullstellen	$k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$	$\frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
Maximum 1 bei	$\frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$2k\pi$
Minimum -1 bei	$\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$	$\pi + 2k\pi$
Symmetrie	ungerade: $\sin(-x) = -\sin(x)$	gerade: $\cos(-x) = \cos(x)$

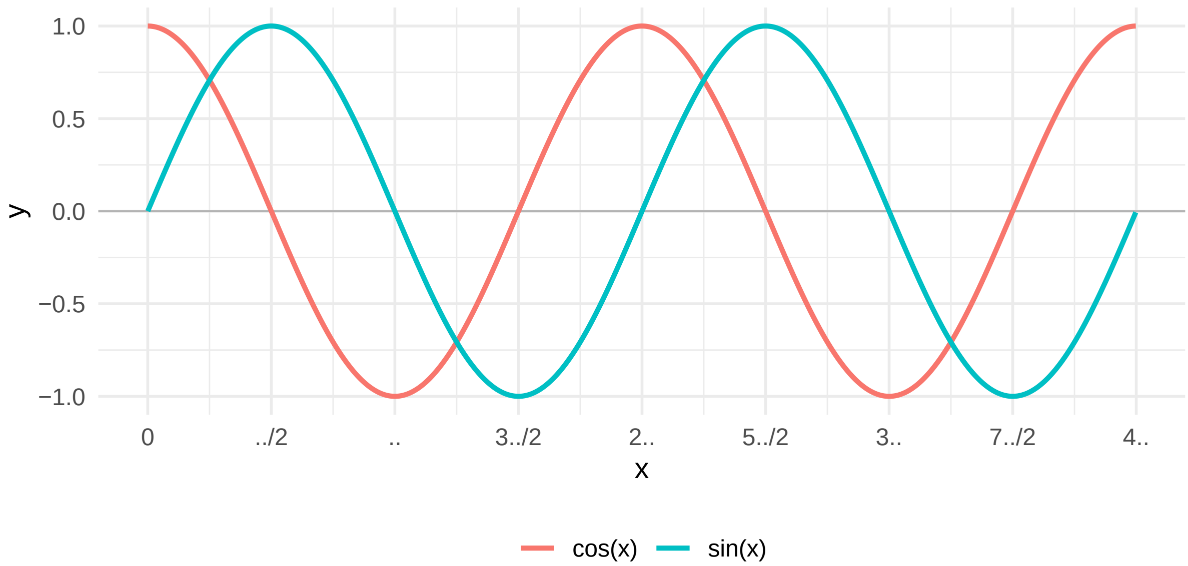

Figure 1: sin(x) und cos(x) auf dem Intervall [0, 4]

Aufgaben

Aufgabe 1

Gib alle Nullstellen von $f(x) = \sin(x)$ im Intervall $[0, 2\pi]$ an. Bestimme außerdem das Maximum und das Minimum in diesem Intervall.

Aufgabe 2

Gib alle Nullstellen von $g(x) = \cos(x)$ im Intervall $[0, 4\pi]$ an.

Aufgabe 3

Berechne die exakten Werte ohne Taschenrechner:

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right), \qquad \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right), \qquad \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$$

Aufgabe 4

Löse die Gleichung $\cos(x) = 0$ für $x \in [0, 4\pi]$.

Aufgabe 5

Für welche $x \in [0, 2\pi]$ gilt $\sin(x) \leq 0$? Gib das Intervall an.

Aufgabe 6

Vereinfache den folgenden Ausdruck so weit wie möglich:

$$\sin(x + 4\pi) - \cos(-x + 6\pi)$$

Aufgabe 7

Wie viele Lösungen hat $\cos(x) = 0$ im Intervall $[0,\ 2024\pi]$?

Aufgabe 8

Gilt $\sin(x) = \sin(x + 2\pi \cdot 1.000.000)$ für alle $x \in \mathbb{R}$? Begründe kurz.

Lösungen

Lösung 1

Nullstellen: $\sin(x) = 0$ bei $x = 0,\ \pi,\ 2\pi$

Maximum: $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ bei $x = \frac{\pi}{2}$

Minimum: $\sin(\frac{3\pi}{2}) = -1$ bei $x = \frac{3\pi}{2}$

Lösung 2

$\cos(x) = 0$ bei $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$:

$$x = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{2}, \quad \frac{7\pi}{2}$$

Lösung 3

$\frac{5\pi}{6} = 150°$: Punkt im 2. Quadranten, y-Koordinate $= \frac{1}{2}$:

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$\frac{4\pi}{3} = 240°$: Punkt im 3. Quadranten, x-Koordinate $= -\frac{1}{2}$:

$$\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$-\frac{3\pi}{2}$: Wegen $\sin(-x) = -\sin(x)$ gilt:

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -(-1) = 1$$

Lösung 4

$\cos(x) = 0$ bei $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Für $x \in [0, 4\pi]$:

$$x = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{2}, \quad \frac{7\pi}{2}$$

Lösung 5

$\sin(x) \leq 0$ für $x \in [\pi, 2\pi]$

(Der Graph von $\sin(x)$ liegt im zweiten Halbperioden-Intervall unterhalb der x-Achse.)

Lösung 6

Periodizität: $\sin(x + 4\pi) = \sin(x)$ (zwei volle Perioden)

Gerade Funktion + Periodizität: $\cos(-x + 6\pi) = \cos(-x) = \cos(x)$

$$\sin(x + 4\pi) - \cos(-x + 6\pi) = \sin(x) - \cos(x)$$

Lösung 7

$\cos(x) = 0$ bei $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Im Intervall $[0, 2024\pi]$ gilt: $k = 0, 1, 2, ...$ solange $\frac{\pi}{2} + k\pi \leq 2024\pi$, also $k \leq 2023{,}5$, d.h. $k \leq 2023$.

Anzahl: $k = 0, 1, ..., 2023 \to$ **2024** Lösungen.

Lösung 8

Ja. Da sin die Periode 2π hat, gilt $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ für alle x.

Damit folgt durch wiederholte Anwendung:

$$\sin(x + 2\pi \cdot 1.000.000) = \sin(x)$$

Die Aussage gilt für alle $x \in \mathbb{R}$.