Modellierung periodischer Vorgänge

Klasse 10

2026-03-15

Grundidee

Periodische Vorgänge (Gezeiten, Temperaturen, Kreisbewegungen, …) werden durch eine Funktion der Form

$$W(t) = a \cdot \sin(b(t - c)) + d$$

modelliert. **Vorgehen:**

1. **Amplitude:** $a = \dfrac{\text{Max} - \text{Min}}{2}$
2. **Mittellage:** $d = \dfrac{\text{Max} + \text{Min}}{2}$
3. **Periode** T aus dem Kontext ablesen $\rightarrow b = \dfrac{2\pi}{T}$
4. **Phasenverschiebung** c aus der Anfangsbedingung bestimmen (wann tritt Mittellage / Maximum / Minimum auf?)

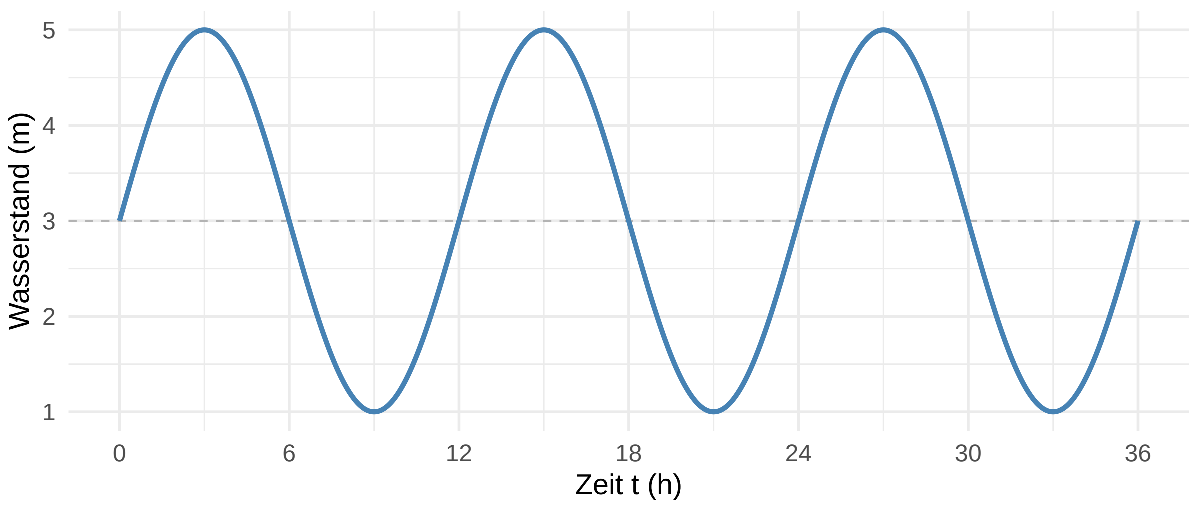

Figure 1: Beispiel: Wasserstand W(t) = 2 · sin(/6 · t) + 3 (Periode 12 h)

Aufgaben

Aufgabe 1

Der Wasserstand im Hafen schwankt periodisch: Maximum 5 m, Minimum 1 m, Periode 12 h. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich der Wasserstand auf der Mittellage und steigt.

Stelle das Modell $W(t)$ auf und berechne den Wasserstand nach $t = 9\,\text{h}$.

Aufgabe 2

Die Tagestemperatur lässt sich näherungsweise durch eine Sinusfunktion beschreiben: Minimum 6 °C um 3 Uhr, Maximum 22 °C, Periode 24 h.

a) Stelle das Modell $T(t)$ auf (t in Stunden nach Mitternacht).

b) Berechne die Temperatur um 15 Uhr.

Aufgabe 3

Ein Punkt auf einem Fahrradrad befindet sich bei $t = 0$ auf dem höchsten Punkt. Das Rad hat einen Radius von 40 cm, die Achse liegt 40 cm über dem Boden, und das Rad dreht mit einer Umdrehung pro Sekunde.

a) Stelle ein Modell $h(t)$ für die Höhe des Punktes über dem Boden auf.

b) In welcher Höhe befindet sich der Punkt nach $t = 0{,}375\,\text{s}$?

Aufgabe 4

Gezeiten: Das erste Maximum beträgt 6,2 m bei $t = 3\,\text{h}$, das erste Minimum beträgt 0,4 m. Die Periode beträgt 12,5 h.

a) Stelle das Modell $H(t)$ auf.

b) Berechne $H(9{,}5)$ auf eine Dezimalstelle genau.

Aufgabe 5

Auf einem fremden Planeten schwankt die Temperatur sinusförmig zwischen $-180\,°\text{C}$ und $+220\,°\text{C}$. Ein Planetentag dauert 1000 h. Zum Zeitpunkt $t = 0$ herrscht das Minimum.

a) Stelle das Modell $T(t)$ auf.

b) Berechne die Temperatur nach 250 h.

c) Ab welchem Zeitpunkt $t > 0$ übersteigt die Temperatur erstmals 100 °C?

Aufgabe 6

Die scheinbare Magnitude (Helligkeit) eines Quasars schwankt sinusförmig zwischen 4,0 und 16,0. Die Periode beträgt 3,7 Jahre. Zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt die Magnitude 10,0 und nimmt zu *(größere Magnitude = dunkler)*.

a) Stelle das Modell $M(t)$ auf (t in Jahren).

b) Nach wie vielen Jahren wird der Quasar erstmals am dunkelsten (Maximum der Magnitude)?

Lösungen

Lösung 1

$a = \frac{5-1}{2} = 2, \quad d = \frac{5+1}{2} = 3, \quad T = 12 \Rightarrow b = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$

Bei $t = 0$ Mittellage und steigend → kein Phasenshift ($c = 0$):

$$W(t) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\,t\right) + 3$$

Nach 9 h:

$$W(9) = 2 \cdot \sin\left(\frac{9\pi}{6}\right) + 3 = 2 \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 3 = 2 \cdot (-1) + 3 = 1\,\text{m}$$

Lösung 2

a) $a = \frac{22-6}{2} = 8$, $d = \frac{22+6}{2} = 14$, $T = 24 \Rightarrow b = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$

Minimum bei $t = 3$, also $\sin(b(t-c)) = -1$ bei $t = 3$:

$$\frac{\pi}{12}(3-c) = -\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad 3 - c = -6 \quad \Rightarrow \quad c = 9$$

$$T(t) = 8 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}(t-9)\right) + 14$$

b) $T(15) = 8 \cdot \sin(\frac{\pi}{12} \cdot 6) + 14 = 8 \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) + 14 = 8 + 14 = 22\,°\text{C}$

(Das Maximum — plausibel für 15 Uhr.)

Lösung 3

a) Achse bei 40 cm, Radius 40 cm: Max = 80 cm, Min = 0 cm.

$a = 40$, $d = 40$, $T = 1\,\text{s} \Rightarrow b = 2\pi$

Bei $t = 0$ auf dem höchsten Punkt → Kosinusfunktion (oder Sinus mit Phasenshift $-\frac{\pi}{2}$):

$$h(t) = 40 \cdot \cos(2\pi t) + 40$$

b) $h(0{,}375) = 40 \cdot \cos(0{,}75\pi) + 40 = 40 \cdot \cos(135°) + 40 = 40 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 40$

$$= 40 - 20\sqrt{2} \approx 40 - 28{,}3 \approx 11{,}7\,\text{cm}$$

Lösung 4

a) $a = \frac{6{,}2-0{,}4}{2} = 2{,}9$, $d = \frac{6{,}2+0{,}4}{2} = 3{,}3$, $T = 12{,}5 \Rightarrow b = \frac{2\pi}{12{,}5} = \frac{4\pi}{25}$

Maximum bei $t = 3$:

$$\frac{4\pi}{25}(3-c) = \frac{\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad 3-c = \frac{25}{8} \quad\Rightarrow\quad c = 3 - 3{,}125 = -0{,}125$$

$$H(t) = 2{,}9 \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{25}(t+0{,}125)\right) + 3{,}3$$

b) $H(9{,}5) = 2{,}9 \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{25} \cdot 9{,}625\right) + 3{,}3$

$\frac{4\pi}{25} \cdot 9{,}625 = \frac{38{,}5\pi}{25} \approx 4{,}838\,\mathrm{rad}$

$\sin(4{,}838) \approx -1{,}00$ (nahe $\frac{3\pi}{2}$)

$$H(9{,}5) \approx 2{,}9 \cdot (-1) + 3{,}3 = 0{,}4\,\mathrm{m}$$

(Minimum, plausibel: halbe Periode nach dem Maximum)

Lösung 5

a) $a = \frac{220-(-180)}{2} = 200$, $d = \frac{220+(-180)}{2} = 20$

$T = 1000 \Rightarrow b = \frac{2\pi}{1000} = \frac{\pi}{500}$

Minimum bei $t = 0$: $\sin(b(0-c)) = -1 \Rightarrow c = \frac{T}{4} = 250$ — oder einfacher: Kosinusfunktion negieren:

$$T(t) = -200 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{500}\,t\right) + 20$$

b) $T(250) = -200 \cdot \cos\left(\frac{250\pi}{500}\right) + 20 = -200 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 20 = 0 + 20 = 20\,°\mathrm{C}$

(Mittellage nach einem Viertel der Periode — plausibel.)

c) $T(t) > 100$:

$$-200\cos\left(\frac{\pi}{500}t\right) + 20 = 100 \quad\Rightarrow\quad \cos\left(\frac{\pi}{500}t\right) = -0{,}4$$

$$\frac{\pi}{500}t = \arccos(-0{,}4) \approx 1{,}982 \quad\Rightarrow\quad t \approx \frac{500 \cdot 1{,}982}{\pi} \approx 315\,\mathrm{h}$$

Lösung 6

a) $a = \frac{16-4}{2} = 6$, $d = \frac{16+4}{2} = 10$, $T = 3{,}7 \Rightarrow b = \frac{2\pi}{3{,}7}$

Bei $t = 0$: Mittellage mit zunehmender Tendenz $\rightarrow$ Standardsinus, kein Phasenshift:

$$M(t) = 6 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3{,}7}\,t\right) + 10$$

b) Maximum (Magnitude 16, also dunkelster Punkt) bei $\sin(...) = 1$:

$$\frac{2\pi}{3{,}7}\,t = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{3{,}7}{4} = 0{,}925\,\text{Jahre}$$