Bogenmaß und Einheitskreis

Klasse 10

2026-03-15

Grundidee

Das **Bogenmaß** (Radiant) gibt einen Winkel als Länge des Kreisbogens auf dem Einheitskreis (Radius 1) an.

Umrechnung:

$$\alpha_{\text{rad}} = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha_{\circ} \qquad \alpha_{\circ} = \frac{180}{\pi} \cdot \alpha_{\text{rad}}$$

Wichtige Werte:

Grad	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°	270°	360°
Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Einheitskreis: Der Punkt zum Winkel α hat die Koordinaten $P(\alpha) = (\cos\alpha,\ \sin\alpha)$.

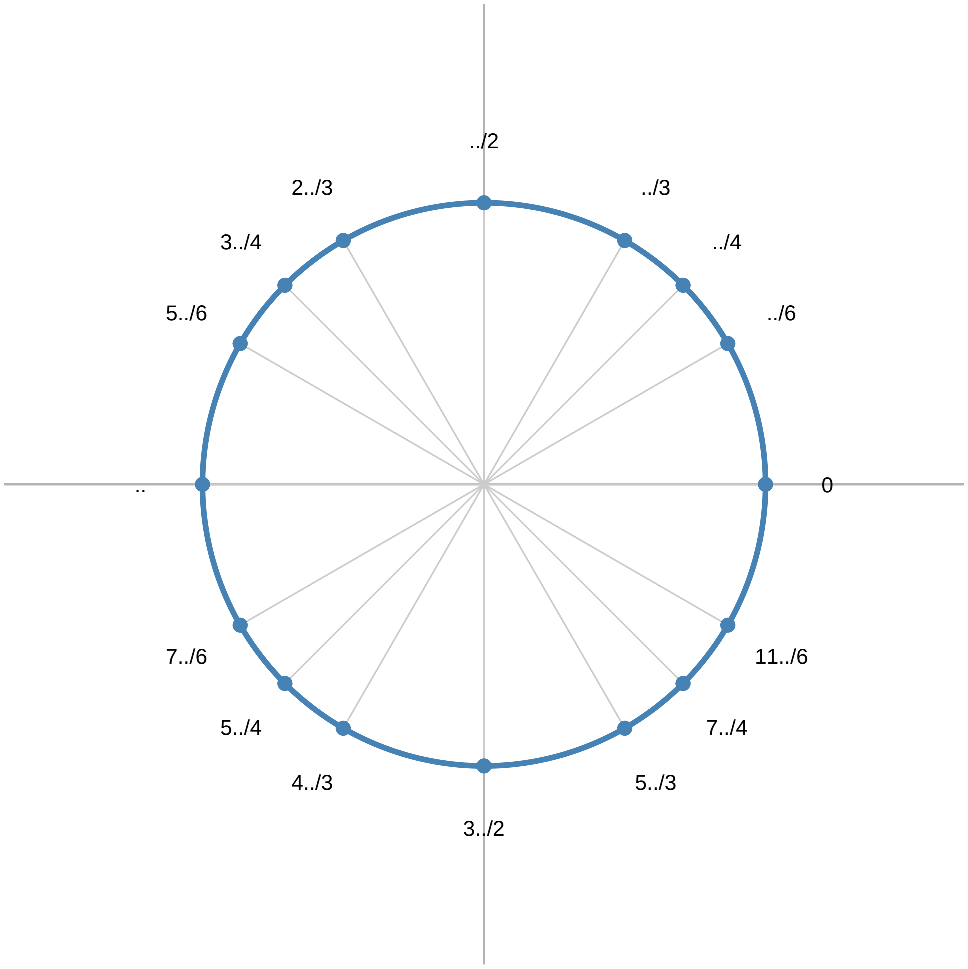

Figure 1: Einheitskreis mit wichtigen Winkeln

Aufgaben

Aufgabe 1

Rechne ins Bogenmaß um: 90°

Aufgabe 2

Rechne ins Bogenmaß um: $30°, \quad 150°, \quad 315°$

Aufgabe 3

Rechne ins Gradmaß um: $\frac{2\pi}{3}, \quad \frac{7\pi}{6}, \quad \frac{5\pi}{4}$

Aufgabe 4

Bestimme die exakten Werte ohne Taschenrechner:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right), \qquad \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right), \qquad \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

Aufgabe 5

Bestimme alle $\alpha \in [0, 2\pi]$ mit $\cos(\alpha) = -\frac{1}{2}$.

Aufgabe 6

Berechne ohne Taschenrechner und vereinfache:

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Nutze dann dieselbe Überlegung: Was ergibt $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)$ für beliebiges α?

Aufgabe 7

Rechne 7200° ins Bogenmaß um. Welchen Wert hat $\sin(7200°)$?

Aufgabe 8

Gib die Koordinaten des Punktes $P(\alpha)$ auf dem Einheitskreis für $\alpha = 2025\pi$ an. Begründe kurz.

Lösungen

Lösung 1

$$90° \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{2}$$

Lösung 2

$$30° \to \frac{\pi}{6} \qquad 150° \to \frac{5\pi}{6} \qquad 315° \to \frac{7\pi}{4}$$

Lösung 3

$$\frac{2\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi} = 120° \qquad \frac{7\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi} = 210° \qquad \frac{5\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} = 225°$$

Lösung 4

$\frac{3\pi}{2}$ entspricht 270°, dort ist der Punkt $(0, -1)$:

$$\sin\left(\tfrac{3\pi}{2}\right) = -1$$

$\frac{2\pi}{3}$ entspricht 120°, Punkt $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$:

$$\cos\left(\tfrac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$\frac{5\pi}{6}$ entspricht 150°, Punkt $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$:

$$\sin\left(\tfrac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

Lösung 5

$\cos(\alpha) = -\frac{1}{2}$ liegt im 2. und 3. Quadranten (dort ist $\cos < 0$).

Grundwinkel: $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, also:

$$\alpha_1 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}, \qquad \alpha_2 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

Lösung 6

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

Allgemein gilt der **trigonometrische Pythagoras**: $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Lösung 7

$$7200° \cdot \frac{\pi}{180} = 40\pi$$

Da $40\pi = 20 \cdot 2\pi$, liegt 7200° nach genau 20 vollen Umdrehungen wieder bei 0°:

$$\sin(7200°) = \sin(40\pi) = \sin(0) = 0$$

Lösung 8

$2025\pi = 2024\pi + \pi = 1012 \cdot 2\pi + \pi$

Nach 1012 vollen Umdrehungen bleibt π übrig — das entspricht 180°, also dem Punkt $(-1, 0)$.

$$P(2025\pi) = (-1,\ 0) \qquad \Rightarrow \qquad \cos(2025\pi) = -1, \quad \sin(2025\pi) = 0$$

