

Simulation und Monte-Carlo — Aufgaben

Klasse 10

2026-03-15

Grundidee

Simulation schätzt Wahrscheinlichkeiten durch wiederholtes Durchführen (oder Nachbilden) eines Zufallsexperiments. Das Ergebnis ist die **relative Häufigkeit** des Ereignisses über alle Versuche. Je größer die Anzahl der Versuche n , desto näher liegt die relative Häufigkeit an der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit. Bei der Monte-Carlo-Methode werden Zufallszahlen genutzt, um geometrische oder schwer berechenbare Wahrscheinlichkeiten zu schätzen.

Aufgaben

Aufgabe 1

Ein fairer Würfel wurde 200-mal geworfen. Die Ergebnisse:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Häufigkeit	31	38	28	35	34	34

- Berechne die relative Häufigkeit jeder Augenzahl.
 - Vergleiche mit der theoretischen Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$.
 - Schätze aus der Simulation: Wie oft fiel eine Zahl ≥ 4 ?
-

Aufgabe 2

Zur Simulation eines Münzwurfs wird die Zuordnung verwendet: gerade Ziffer = Kopf (K), ungerade Ziffer = Zahl (Z). Folgende Zufallsziffernfolge liegt vor:

3, 7, 2, 5, 8, 1, 0, 4, 9, 6, 2, 3, 5, 8, 4

- Übertrage in K/Z-Folge.
- Berechne die relative Häufigkeit von Kopf.
- Wie viele aufeinanderfolgende Ziffern müsste man auswerten, um $P(K) = 0,5 \pm 0,05$ mit hoher Sicherheit schätzen zu können? (Schätzung, keine genaue Berechnung nötig.)

Aufgabe 3

Zwei faire Würfel werden gleichzeitig geworfen. Gesucht ist $P(\text{Summe} = 7)$.

- Berechne die theoretische Wahrscheinlichkeit exakt.
 - Beschreibe, wie du das Experiment mit einer Tabelle von Zufallszahlen (Ziffern 1–6) simulieren würdest.
 - Eine Simulation mit $n = 500$ ergab 84 mal die Summe 7. Vergleiche die relative Häufigkeit mit dem theoretischen Wert.
-

Aufgabe 4

Zur Schätzung von π werden $n = 1000$ zufällige Punkte (x, y) mit $x, y \in [0, 1]$ erzeugt. Davon liegen 786 Punkte innerhalb des Viertelkreises ($x^2 + y^2 \leq 1$).

- Schätze π aus diesen Daten.
 - Wie groß ist der absolute Fehler gegenüber dem wahren Wert $\pi \approx 3,14159$?
 - Was müsste man tun, um die Schätzung zu verbessern?
-

Aufgabe 5

Das **Geburtstagsproblem**: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Gruppe von k Personen mindestens zwei am selben Tag Geburtstag haben?

Für $k = 23$ berechnet man:

$$P(\text{alle verschieden}) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdots \frac{343}{365}$$

- Erkläre, warum dieser Term die Wahrscheinlichkeit für „alle verschieden“ beschreibt.
 - Berechne $P(\text{alle verschieden})$ für $k = 23$ (Taschenrechner).
 - Was ist $P(\text{mindestens zwei gleich})$?
 - Beschreibe, wie man dieses Ergebnis mit einer Simulation überprüfen könnte.
-

Aufgabe 6 (*absurd*)

Eine Simulation von $n = 10^8$ Versuchen ergibt, dass ein Ereignis A in 31 416 000 Versuchen eintritt.

- Schätze $P(A)$ aus der Simulation.
- Welche bekannte Konstante schätzt diese Simulation offenbar?
- Was wird hier geometrisch simuliert?

(Das Verfahren ist identisch zu Aufgabe 4.)

Aufgabe 7 (absurd)

Eine faire Münze wird solange geworfen, bis zum ersten Mal **Kopf** fällt. Sei X die Anzahl der Würfe.

- Berechne $P(X = 1)$, $P(X = 2)$, $P(X = 3)$, $P(X = k)$.
 - Berechne $P(X \leq 10)$.
 - Beschreibe, wie man $P(X \leq 10)$ mit einer Simulation schätzen könnte.
-

Lösungen

Lösung 1

- Relative Häufigkeiten: $\frac{31}{200} = 0,155$; $\frac{38}{200} = 0,190$; $\frac{28}{200} = 0,140$; $\frac{35}{200} = 0,175$; $\frac{34}{200} = 0,170$;
 $\frac{34}{200} = 0,170$
 - Theoretisch je $\frac{1}{6} \approx 0,167$. Alle Werte liegen nahe daran — typische Schwankungen bei $n = 200$.
 - Zahlen ≥ 4 : $35 + 34 + 34 = 103$ Mal. Relative Häufigkeit: $\frac{103}{200} = 0,515$ (theoretisch 0,5).
-

Lösung 2

- Ungerade: Z, Z, K, Z, K, Z, K, K, Z, K, K, Z, Z, K, K \rightarrow 8 K, 7 Z
 - $\frac{8}{15} \approx 0,533$
 - Faustregel: Bei n Versuchen liegt die relative Häufigkeit mit hoher Wahrscheinlichkeit im Bereich $0,5 \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$. Für $\pm 0,05$: $\frac{1}{\sqrt{n}} \approx 0,05 \Rightarrow n \approx 400$.
-

Lösung 3

- Günstige Paare mit Summe 7: (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1) — 6 von 36.
 $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0,167$
 - Zwei unabhängige Zufallsziffern 1–6 erzeugen. Wenn ihre Summe 7 ergibt: Treffer. n mal wiederholen.
 - Relative Häufigkeit: $\frac{84}{500} = 0,168$ — sehr nahe am theoretischen Wert 0,167.
-

Lösung 4

Lösungen

- a) $\pi \approx 4 \cdot \frac{786}{1000} = 4 \cdot 0,786 = 3,144$
b) $|3,144 - 3,14159| \approx 0,002$
c) n erhöhen — bei $n = 10^6$ ist die Schätzung typischerweise auf $\pm 0,001$ genau.
-

Lösung 5

- a) Die erste Person hat frei wählbaren Geburtstag (Faktor $\frac{365}{365} = 1$). Die zweite muss einen anderen Tag haben ($\frac{364}{365}$), die dritte noch einen anderen ($\frac{363}{365}$) usw. bis zur 23. Person ($\frac{343}{365}$).
- b) $P(\text{alle verschieden}) = \frac{365!/(365-23)!}{365^{23}} \approx 0,4927$
c) $P(\text{mind. zwei gleich}) = 1 - 0,4927 \approx 0,5073 > 0,5$
d) Simulation: Für jede Gruppe zufällig 23 Zahlen aus $\{1, \dots, 365\}$ ziehen (mit Zurücklegen). Prüfen, ob eine Zahl doppelt vorkommt. Nach vielen Gruppen die relative Häufigkeit berechnen.
-

Lösung 6

- a) $P(A) \approx \frac{31\,416\,000}{100\,000\,000} = 0,31416$
b) $0,31416 \approx \frac{\pi}{10}$ — offenbar wird π geschätzt.
c) Es wird die Monte-Carlo-Methode für den Viertelkreis verwendet, aber nur $\frac{1}{10}$ des Quadrats genutzt, oder der Radius ist $\frac{1}{\sqrt{10}}$. Wahrscheinlicher: Es wird $P(x^2 + y^2 \leq 0,1)$ über $[0, 1]^2$ simuliert — die Fläche des Viertelkreises mit Radius $\sqrt{0,1}$ ist $\frac{\pi \cdot 0,1}{4} \approx 0,0785$. Am naheliegendsten: klassische $\pi/4$ -Simulation mit $\pi \approx 4 \cdot 0,31416 \approx 3,1416$.
-

Lösung 7

- a) $P(X = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^k$
 $P(X = 1) = \frac{1}{2}, P(X = 2) = \frac{1}{4}, P(X = 3) = \frac{1}{8}$
b) $P(X \leq 10) = 1 - P(X > 10) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 1 - \frac{1}{1024} \approx 0,999$
c) Simulation: Münze werfen (oder Zufallszahl $\in \{0, 1\}$ erzeugen), bis erstmals 1 (Kopf) erscheint. Anzahl der Würfe notieren. Diesen Versuch $n = 10\,000$ mal wiederholen. Anteil der Versuche mit $X \leq 10$ berechnen.