Mehrstufige Zufallsexperimente — Aufgaben

Klasse 10

2026-03-15

Grundidee

Bei mehrstufigen Zufallsexperimenten zeichnet man ein Baumdiagramm: an jeden Ast kommt die Wahrscheinlichkeit des zugehörigen Ergebnisses. Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades ergibt sich durch Multiplikation der Astwahrscheinlichkeiten (Pfadregel). Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses erhält man durch Addition aller zugehörigen Pfade. Oft ist die Gegenwahrscheinlichkeit $P(E) = 1 - P(\bar{E})$ der schnellere Weg.

Aufgaben

Aufgabe 1

Eine faire Münze wird zweimal geworfen.

a) Zeichne das vollständige Baumdiagramm.
b) Bestimme $P(\text{genau ein Kopf})$.
c) Bestimme $P(\text{mindestens ein Kopf})$.

Aufgabe 2

Eine Urne enthält 4 rote und 3 blaue Kugeln. Es wird zweimal **mit** Zurücklegen gezogen.

a) Zeichne das Baumdiagramm.
b) Berechne $P(\text{beide gleiche Farbe})$.
c) Berechne $P(\text{mindestens eine rote Kugel})$.

Aufgabe 3

Dieselbe Urne wie in Aufgabe 2 (4 rot, 3 blau), nun wird zweimal **ohne** Zurücklegen gezogen.

a) Zeichne das Baumdiagramm mit den bedingten Wahrscheinlichkeiten.
b) Berechne $P(\text{beide gleiche Farbe})$.

c) Vergleiche das Ergebnis mit Aufgabe 2. Was fällt auf?

Aufgabe 4

Ein fairer Würfel wird dreimal geworfen.

a) Wie viele Pfade hat das vollständige Baumdiagramm?
b) Berechne $P(\text{mindestens eine 6})$ mithilfe der Gegenwahrscheinlichkeit.
c) Berechne $P(\text{genau zwei 6en})$.

Aufgabe 5

Zuerst wird eine Münze geworfen. Fällt **Kopf**, wird ein Würfel geworfen und notiert, ob die Zahl ≤ 3 (Ereignis N) oder > 3 (Ereignis G) ist. Fällt **Zahl**, wird eine Kugel aus einer Urne mit 2 roten und 3 blauen Kugeln gezogen.

a) Zeichne das vollständige Baumdiagramm.
b) Berechne $P(\text{rote Kugel oder } G)$.
c) Berechne $P(\text{Kopf und } N)$.

Aufgabe 6 *(absurd)*

Eine faire Münze wird 100-mal geworfen.

a) Wie viele Pfade hätte das vollständige Baumdiagramm?
b) Berechne $P(\text{mindestens einmal Kopf})$ mithilfe der Gegenwahrscheinlichkeit.
c) Ab welcher Anzahl n von Würfen gilt $P(\text{mindestens einmal Kopf}) > 0{,}9999$?

(Das Verfahren ist identisch zu Aufgabe 4b.)

Aufgabe 7 *(absurd)*

Ein Ereignis hat die Wahrscheinlichkeit $p = \dfrac{1}{1\,000\,000}$. Das Experiment wird $n = 2\,000\,000$-mal wiederholt.

a) Berechne $P(\text{kein Treffer in allen } n \text{ Versuchen})$.
b) Berechne $P(\text{mindestens ein Treffer})$.
c) Was fällt auf, wenn man das Ergebnis mit $1 - \dfrac{1}{e^2}$ vergleicht?

(Hinweis: $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e}$ für $n \to \infty$.)

CC BY-NC 4.0

Lösungen

Lösung 1

a) Baumdiagramm: Wurzel $\to$ K ($\frac{1}{2}$) und Z ($\frac{1}{2}$); von K: KK, KZ; von Z: ZK, ZZ — je Ast $\frac{1}{2}$.

b) Günstige Pfade: KZ und ZK.

$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

c) $P(\text{mind. ein K}) = 1 - P(\text{kein K}) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

Lösung 2

a) Äste je $\frac{4}{7}$ (R) und $\frac{3}{7}$ (B) auf beiden Stufen.

b) $P(RR) + P(BB) = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} + \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{16}{49} + \frac{9}{49} = \dfrac{25}{49}$

c) $P(\text{mind. 1 R}) = 1 - P(BB) = 1 - \frac{9}{49} = \dfrac{40}{49}$

Lösung 3

a) Stufe 1: R mit $\frac{4}{7}$, B mit $\frac{3}{7}$. Nach R: R mit $\frac{3}{6}$, B mit $\frac{3}{6}$. Nach B: R mit $\frac{4}{6}$, B mit $\frac{2}{6}$.

b) $P(RR) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$

$P(BB) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}$

$P(\text{gleich}) = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \dfrac{3}{7}$

c) Mit Zurücklegen: $\frac{25}{49} \approx 0{,}510$; ohne Zurücklegen: $\frac{3}{7} \approx 0{,}429$.

Ohne Zurücklegen ist die Wahrscheinlichkeit für gleiche Farbe geringer, weil nach dem ersten Zug weniger Kugeln der gezogenen Farbe verbleiben.

Lösung 4

a) $6^3 = 216$ Pfade.

b) $P(\text{mind. eine 6}) = 1 - P(\text{keine 6}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 1 - \frac{125}{216} = \dfrac{91}{216} \approx 0{,}421$

c) Genau zwei 6en: 3 Pfade $(6,6,\neg 6)$, $(6,\neg 6,6)$, $(\neg 6,6,6)$, je mit $P = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{216}$

$P = 3 \cdot \frac{5}{216} = \dfrac{15}{216} = \dfrac{5}{72} \approx 0{,}069$

 CC BY-NC 4.0

Lösung 5

a) Stufe 1: K ($\frac{1}{2}$), Z ($\frac{1}{2}$). Von K: N ($\frac{1}{2}$), G ($\frac{1}{2}$). Von Z: R ($\frac{2}{5}$), B ($\frac{3}{5}$).

b) Pfade mit R oder G: (Z,R) und (K,G).

$$P = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{5} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{4} = \frac{9}{20}$$

c) $P(\text{K und N}) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$

Lösung 6

a) $2^{100} = 1\,267\,650\,600\,228\,229\,401\,496\,703\,205\,376$ Pfade.

b) $P(\text{mind. ein K}) = 1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{100} \approx 1 - 7{,}89 \cdot 10^{-31} \approx 1$

c) $1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n} > 0{,}9999 \Rightarrow \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n} < 0{,}0001$

$$n > \frac{\ln 0{,}0001}{\ln 0{,}5} = \frac{-9{,}2103}{-0{,}6931} \approx 13{,}3$$

Ab $n = 14$ Würfen gilt $P > 0{,}9999$.

Lösung 7

a) $P(\text{kein Treffer}) = \left(1 - \tfrac{1}{1\,000\,000}\right)^{2\,000\,000} = (0{,}999999)^{2\,000\,000}$

$\ln\left((0{,}999999)^{2\,000\,000}\right) = 2\,000\,000 \cdot \ln(0{,}999999) \approx 2\,000\,000 \cdot (-10^{-6}) = -2$

$P(\text{kein Treffer}) \approx e^{-2} \approx 0{,}1353$

b) $P(\text{mind. ein Treffer}) = 1 - e^{-2} \approx 0{,}8647$

c) $1 - \frac{1}{e^2} \approx 0{,}8647$ — der Vergleich stimmt exakt, weil $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} \to e^{-2}$.

CC BY-NC 4.0