Logarithmus — Aufgaben

Klasse 10

2026-03-15

Grundidee

$\log_a(x)$ ist der Exponent, mit dem man a potenzieren muss, um x zu erhalten: $\log_a(x) = y \Leftrightarrow a^y = x$. Zum Rechnen nutzt man die Logarithmusgesetze (Produkt $\rightarrow$ Summe, Quotient $\rightarrow$ Differenz, Potenz $\rightarrow$ Faktor) sowie den Basiswechsel $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$, um mit dem Taschenrechner zu rechnen.

Aufgaben

Aufgabe 1

Berechne ohne Taschenrechner:

a) $\log_2(8)$
b) $\log_3(81)$
c) $\log_5(25)$
d) $\log_4\left(\frac{1}{16}\right)$

Aufgabe 2

Vereinfache mit den Logarithmusgesetzen (Basis a beliebig):

a) $\log_a(x^3 \cdot y)$
b) $\log_a\left(\frac{x^2}{y^3}\right)$
c) $\log_a(\sqrt{x})$
d) $2\log_a(3) + \log_a(4) - \log_a(6)$

Aufgabe 3

Löse mit dem Logarithmus (Ergebnis auf 3 Dezimalstellen):

a) $2^x = 50$
b) $3^x = 100$
c) $0{,}8^x = 0{,}1$

Aufgabe 4

Löse:

a) $5 \cdot e^{2x} = 60$
b) $\ln(3x - 1) = 4$
c) $\lg(x^2) = 6$

Aufgabe 5

Löse die Gleichung $\log_3(x^2 - 2x) = 2$.

(Hinweis: Zuerst Gleichung in Potenzschreibweise umformen, dann quadratische Gleichung lösen. Probe nicht vergessen — der Logarithmus ist nur für positive Argumente definiert!)

Aufgabe 6 *(absurd)*

Berechne ohne Taschenrechner, Schritt für Schritt von innen nach außen:

$$\log_2\Big(\log_2\big(\log_2(65536)\big)\Big)$$

Aufgabe 7 *(absurd)*

Löse die Gleichung $e^{e^x} = e^{e^2}$.

(Das Verfahren ist identisch zu Aufgabe 3 — nur verschachtelt.)

Lösungen

Lösung 1

a) $\log_2(8) = 3$, da $2^3 = 8$

b) $\log_3(81) = 4$, da $3^4 = 81$

c) $\log_5(25) = 2$, da $5^2 = 25$

d) $\log_4\left(\frac{1}{16}\right) = -2$, da $4^{-2} = \frac{1}{16}$

Lösung 2

a) $3\log_a(x) + \log_a(y)$

b) $2\log_a(x) - 3\log_a(y)$

c) $\log_a(x^{1/2}) = \frac{1}{2}\log_a(x)$

d) $\log_a(9) + \log_a(4) - \log_a(6) = \log_a\left(\frac{9 \cdot 4}{6}\right) = \log_a(6)$

Lösung 3

a) $x = \dfrac{\ln 50}{\ln 2} = \log_2(50) \approx 5{,}644$

b) $x = \dfrac{\ln 100}{\ln 3} \approx 4{,}192$

c) $x = \dfrac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}8} \approx 10{,}319$

Lösung 4

a) $e^{2x} = 12 \Rightarrow 2x = \ln 12 \Rightarrow x = \dfrac{\ln 12}{2} \approx 1{,}242$

b) $3x - 1 = e^4 \Rightarrow x = \dfrac{e^4 + 1}{3} \approx 18{,}532$

c) $\lg(x^2) = 6 \Rightarrow x^2 = 10^6 \Rightarrow x = \pm 1000$

Probe: $\lg(1000^2) = \lg(10^6) = 6 \quad$ (beide Lösungen gültig, $x^2 > 0$)

Lösung 5

$\log_3(x^2 - 2x) = 2 \Rightarrow x^2 - 2x = 3^2 = 9$

$x^2 - 2x - 9 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{10}$

Probe (Argument muss positiv sein):

- $x_1 = 1 + \sqrt{10} \approx 4{,}16$: $x^2 - 2x \approx 9 > 0$
- $x_2 = 1 - \sqrt{10} \approx -2{,}16$: $x^2 - 2x = (-2{,}16)^2 - 2(-2{,}16) \approx 9 > 0$

Beide Lösungen gültig: $\mathbb{L} = \{1 - \sqrt{10},\ 1 + \sqrt{10}\}$

Lösung 6

Von innen nach außen:

$$65536 = 2^{16} \Rightarrow \log_2(65536) = 16$$

$$\log_2(16) = \log_2(2^4) = 4$$

$$\log_2(4) = \log_2(2^2) = 2$$

$$\log_2\Big(\log_2\big(\log_2(65536)\big)\Big) = 2$$

Lösung 7

$$e^{e^x} = e^{e^2}$$

Da die Exponentialfunktion injektiv ist: $e^x = e^2$, also $x = 2$.

Das Verfahren ist identisch zu $3^x = 100$: Gleichung der Form $a^{(\dots)} = a^{(\dots)} \rightarrow$ Exponenten vergleichen — nur zweimal hintereinander.