Anwendungen: Zinsrechnung und Halbwertszeit — Aufgaben

Klasse 10

2026-03-15

Grundidee

Zinsrechnung und Halbwertszeit sind beides Exponentialfunktionen der Form $f(t) = b \cdot a^t$. Bei der Zinsrechnung gilt $b = K_0$ (Startkapital) und $a = q = 1 + p/100$ (Aufzinsungsfaktor). Bei der Halbwertszeit gilt $a = \frac{1}{2}$ und der Exponent enthält $t/T_{1/2}$. Gesuchte Zeitpunkte erhält man immer durch Logarithmieren.

Aufgaben

Aufgabe 1

€ 1 000 werden zu 3 % Zinsen angelegt.

a) Wie viel Kapital ist nach 10 Jahren vorhanden?
b) Nach wie vielen Jahren übersteigt das Kapital € 1 500?

Aufgabe 2

Das radioaktive Isotop C-14 hat eine Halbwertszeit von 5 730 Jahren. Eine Probe enthält heute 200 g.

a) Wie viel Gramm sind nach 1 000 Jahren noch vorhanden?
b) Nach wie vielen Jahren sind noch 10 % der ursprünglichen Menge vorhanden?

Aufgabe 3

Eine Bakterienkultur verdoppelt sich alle 20 Minuten. Zu Beginn sind 500 Bakterien vorhanden.

a) Stelle einen Funktionsterm $N(t)$ auf (t in Minuten).
b) Wie viele Bakterien gibt es nach 2 Stunden?

c) Nach wie vielen Minuten sind 10^6 Bakterien vorhanden?

Aufgabe 4

Zwei Geldanlagen im Vergleich:

- Anlage A: € 2 000 zu 4 % Zinsen
- Anlage B: € 2 500 zu 2 % Zinsen

a) Stelle für beide den Kapitalterm $K_A(n)$ und $K_B(n)$ auf.
b) Nach wie vielen Jahren hat Anlage A mehr Kapital als Anlage B?

Aufgabe 5

Ein Medikament wird im Körper stündlich um 15 % abgebaut. Zu Beginn sind 80 mg im Blut.

a) Stelle den Term $M(t)$ auf.
b) Wie viel mg sind nach 6 Stunden noch vorhanden?
c) Nach wie vielen Stunden liegt die Konzentration unter 5 mg?

Aufgabe 6 *(absurd)*

Ein Sparkonto trägt 0,0001 % Zinsen pro Jahr (realistisch für bestimmte Konten). Startkapital: € 1.

a) Stelle den Kapitalterm auf.
b) Nach wie vielen Jahren übersteigt das Kapital € 1 000 000 000 000 (eine Billion)?

(Das Verfahren ist identisch zu Aufgabe 1 — nur der Zinssatz ist winzig.)

Aufgabe 7 *(absurd)*

Ein fiktiver Stoff hat eine Halbwertszeit von $T_{1/2} = 1$ Sekunde. Die Startmenge beträgt $N_0 = 10^{50}$ Atome.

a) Nach wie vielen Sekunden ist die erwartete Anzahl verbleibender Atome kleiner als 1?
b) Vergleiche diesen Wert mit dem Alter des Universums ($\approx 4{,}3 \cdot 10^{17}$ Sekunden).

(Das Verfahren ist identisch zu Aufgabe 2b.)

Lösungen

Lösung 1

a) $K_{10} = 1000 \cdot 1{,}03^{10} \approx 1000 \cdot 1{,}3439 = 1\,343{,}92$ €

b) $1000 \cdot 1{,}03^n > 1500 \Rightarrow 1{,}03^n > 1{,}5$

$$n > \frac{\ln 1{,}5}{\ln 1{,}03} \approx \frac{0{,}4055}{0{,}02956} \approx 13{,}7$$

Nach **14 Jahren** übersteigt das Kapital € 1 500.

Lösung 2

a) $N(1000) = 200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1000/5730} \approx 200 \cdot 2^{-0{,}1746} \approx 200 \cdot 0{,}8864 \approx 177{,}3$ g

b) $200 \cdot 2^{-t/5730} = 20 \Rightarrow 2^{-t/5730} = 0{,}1$

$$-\frac{t}{5730} = \log_2(0{,}1) = \frac{\ln 0{,}1}{\ln 2} \approx -3{,}3219$$

$t \approx 3{,}3219 \cdot 5730 \approx 19\,034$ Jahre

Lösung 3

a) Verdopplung alle 20 Minuten: $a = 2$, $b = 500$

$N(t) = 500 \cdot 2^{t/20}$

b) $N(120) = 500 \cdot 2^6 = 500 \cdot 64 = 32\,000$

c) $500 \cdot 2^{t/20} = 10^6 \Rightarrow 2^{t/20} = 2000$

$$\frac{t}{20} = \log_2(2000) = \frac{\ln 2000}{\ln 2} \approx 10{,}965$$

$t \approx 219{,}3$ Minuten ≈ 3 Stunden 39 Minuten

Lösung 4

a) $K_A(n) = 2000 \cdot 1{,}04^n, \quad K_B(n) = 2500 \cdot 1{,}02^n$

b) $2000 \cdot 1{,}04^n > 2500 \cdot 1{,}02^n$

$$\left(\frac{1{,}04}{1{,}02}\right)^n > \frac{2500}{2000} = 1{,}25$$

$$n > \frac{\ln 1{,}25}{\ln(1{,}04/1{,}02)} = \frac{\ln 1{,}25}{\ln 1{,}01961\ldots} \approx \frac{0{,}2231}{0{,}01942} \approx 11{,}49$$

Ab **Jahr 12** liegt Anlage A vorne.

Lösung 5

a) $M(t) = 80 \cdot (0{,}85)^t$

b) $M(6) = 80 \cdot 0{,}85^6 \approx 80 \cdot 0{,}3771 \approx 30{,}2$ mg

c) $80 \cdot 0{,}85^t < 5 \Rightarrow 0{,}85^t < 0{,}0625$

$$t > \frac{\ln 0{,}0625}{\ln 0{,}85} \approx \frac{-2{,}7726}{-0{,}1625} \approx 17{,}1$$

Nach **18 Stunden** liegt die Konzentration unter 5 mg.

Lösung 6

a) $q = 1 + \dfrac{0{,}0001}{100} = 1{,}000001$

$K(n) = 1 \cdot (1{,}000001)^n$

b) $(1{,}000001)^n > 10^{12}$

$$n > \frac{\ln 10^{12}}{\ln 1{,}000001} = \frac{12 \cdot \ln 10}{\ln 1{,}000001} \approx \frac{27{,}631}{0{,}000001} \approx 27\,631\,021$$

Es dauert etwa **27,6 Millionen Jahre** — mit demselben Verfahren wie Aufgabe 1.

Lösung 7

a) $10^{50} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t < 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^t < 10^{-50}$

$$t > \frac{\ln 10^{50}}{\ln 2} = \frac{50 \cdot \ln 10}{\ln 2} \approx \frac{115{,}13}{0{,}6931} \approx 166{,}1 \text{ Sekunden}$$

Nach weniger als **3 Minuten** ist von 10^{50} Atomen statistisch kein einziges mehr übrig.

b) Das Alter des Universums ($4{,}3 \cdot 10^{17}$ s) ist um den Faktor $\approx 2{,}6 \cdot 10^{15}$ größer — die 166 Sekunden sind im kosmischen Vergleich ein Wimpernschlag.