

Bedingte Wahrscheinlichkeit erkennen

Klasse 11

2026-03-15

Grundidee

Manchmal interessiert nicht die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses insgesamt, sondern *unter der Bedingung*, dass ein anderes Ereignis bereits eingetreten ist.

Woran erkennt man bedingte Wahrscheinlichkeit im Text?

Die entscheidende Frage ist: *Wird die Grundgesamtheit eingeschränkt?* Steht im Aufgabentext eine der folgenden Formulierungen, handelt es sich um bedingte Wahrscheinlichkeit:

- „Von den Personen, die ... ” $\rightarrow$ nur diese Teilgruppe zählt
- „Unter den ...-Fans ...“, „Unter allen ...” $\rightarrow$ Grundgesamtheit ist bereits gefiltert
- „Wie wahrscheinlich ist ..., *wenn* bekannt ist, dass ...”
- „Mit welcher Wahrscheinlichkeit ... , *gegeben dass* ...”
- „*Jemand* aus der Gruppe der ... wird zufällig ausgewählt ...”

Kein Anhaltspunkt für bedingte Wahrscheinlichkeit liegt vor, wenn die Frage sich auf *alle* Personen/Fälle bezieht — also die Grundgesamtheit ungefiltert bleibt. Ebenso liegt keine Bedingung vor, wenn zwei Zufallsexperimente schlicht *nacheinander* durchgeführt werden (Münze zweimal werfen, Würfel zweimal rollen): hier sind die Ergebnisse voneinander unabhängig, es gibt keine Einschränkung der Grundgesamtheit.

Zwei Merkmale, je zwei Ausprägungen $\rightarrow$ Vierfeldertafel

Liegen zwei Merkmale $A/\bar{A}$ und $B/\bar{B}$ vor, trägt man die absoluten Häufigkeiten in eine Vierfeldertafel ein:

	B	$\bar{B}$	Σ
A	$n(A \cap B)$	$n(A \cap \bar{B})$	$n(A)$
$\bar{A}$	$n(\bar{A} \cap B)$	$n(\bar{A} \cap \bar{B})$	$n(\bar{A})$
Σ	$n(B)$	$n(\bar{B})$	n

Die bedingte Wahrscheinlichkeit liest man direkt ab. $P_B(A)$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B :

$$P_B(A) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Abgrenzung: verknüpfte Zufallsexperimente

Aufgaben

Bei zwei *unabhängig* wiederholten Zufallsexperimenten (z.B. zweimal eine Münze werfen) gibt es keine Bedingung — man multipliziert einfach die Einzelwahrscheinlichkeiten. Hier ist $P_B(A) = P(A)$ von vornherein gegeben; eine Vierfeldertafel ist nicht nötig.

Stochastische Unabhängigkeit

A und B heißen *stochastisch unabhängig*, wenn

$$P_B(A) = P(A)$$

Äquivalent dazu: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Das Eintreten von B liefert dann *keine* Information über A .

Aufgaben

Aufgabe 1

In einer Schulklasse von 30 Schülern mögen 20 Mathematik, 10 nicht. Von den Mathe-Fans haben 15 die letzte Prüfung bestanden, 5 nicht. Von den Nicht-Fans haben 4 bestanden, 6 nicht.

- Erstelle die Vierfeldertafel.
- Bestimme $P_{\text{Mathe-Fan}}(\text{bestanden})$.
- Prüfe stochastische Unabhängigkeit.

Aufgabe 2

Eine Umfrage unter 200 Personen ergibt:

	Sport	kein Sport	Σ
gesund	95	35	130
krank	30	40	70
Σ	125	75	200

- Bestimme $P_{\text{Sport}}(\text{gesund})$ und $P_{\text{kein Sport}}(\text{gesund})$.
- Bestimme $P(\text{gesund})$.
- Sind „gesund“ und „Sport treiben“ stochastisch unabhängig?

Aufgabe 3

In einer Fabrik produzieren Maschine M_1 und Maschine M_2 zusammen 500 Teile pro Tag. M_1 produziert 300 Teile, davon 12 defekt. M_2 produziert 200 Teile, davon 6 defekt.

- Erstelle die Vierfeldertafel für die Merkmale *Maschine* und *Qualität* (defekt / einwandfrei).
- Bestimme $P_{M_1}(\text{defekt})$ und $P_{M_2}(\text{defekt})$.
- Welche Maschine produziert verhältnismäßig mehr Ausschuss?

Aufgaben

- d) Sind Maschine und Qualität stochastisch unabhängig? Begründe.
-

Aufgabe 4

Eine Studie untersucht den Zusammenhang zwischen Kaffeekonsum und Schlafstörungen. Von 480 befragten Personen:

- 270 trinken täglich Kaffee, davon 162 mit Schlafstörungen.
 - 210 trinken keinen Kaffee, davon 42 mit Schlafstörungen.
- a) Erstelle die Vierfeldertafel.
b) Berechne $P_{\text{Kaffee}}(\text{Schlafstörung})$ und $P_{\text{kein Kaffee}}(\text{Schlafstörung})$.
c) Überprüfe stochastische Unabhängigkeit über $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
d) Was lässt sich inhaltlich schlussfolgern? (Vorsicht: Korrelation $\neq$ Kausalität.)
-

Aufgabe 5 — Rückwärts aus der Bedingung

Gegeben: $P(B) = 0,4$, $P_B(A) = 0,75$, $P(A) = 0,5$.

- a) Berechne $P(A \cap B)$.
b) Erstelle eine vollständige Vierfeldertafel für $n = 1000$ Personen.
c) Sind A und B stochastisch unabhängig?
-

Aufgabe 6

Eine App hat 1 000 000 Nutzer. 60 % nutzen iOS, der Rest Android. Von den iOS-Nutzern kaufen $\frac{1}{3}$ ein In-App-Produkt; von den Android-Nutzern $\frac{1}{4}$.

- a) Erstelle die Vierfeldertafel (absolute Häufigkeiten).
b) Berechne $P_{\text{iOS}}(\text{Kauf})$ und $P(\text{Kauf})$.
c) Sind Betriebssystem und Kaufverhalten stochastisch unabhängig?
-

Aufgabe 7

Für zwei Ereignisse A und B gilt lediglich: $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$. Die Gesamtanzahl n der Fälle ist unbekannt.

- a) Sind A und B stochastisch unabhängig? (Ohne n zu kennen!)
b) Berechne $P_B(A)$ und $P_A(B)$.
c) Was fällt beim Vergleich von $P_B(A)$ mit $P(A)$ auf?
-

Lösungen

Lösung 1

a)

	bestanden	nicht bestanden	Σ
Mathe-Fan	15	5	20
kein Mathe-Fan	4	6	10
Σ	19	11	30

$$\text{b) } P_{\text{Mathe-Fan}}(\text{bestanden}) = \frac{15}{20} = 0,75$$

$$\text{c) } P(\text{bestanden}) = \frac{19}{30} \approx 0,633$$

Da $0,75 \neq 0,633$: **nicht stochastisch unabhängig** — Mathe-Fans bestehen häufiger.

Lösung 2

$$\text{a) } P_{\text{Sport}}(\text{gesund}) = \frac{95}{125} = 0,76$$

$$P_{\text{kein Sport}}(\text{gesund}) = \frac{35}{75} \approx 0,467$$

$$\text{b) } P(\text{gesund}) = \frac{130}{200} = 0,65$$

$$\text{c) } P(\text{gesund}) \cdot P(\text{Sport}) = 0,65 \cdot \frac{125}{200} = 0,65 \cdot 0,625 = 0,40625$$

$$P(\text{gesund} \cap \text{Sport}) = \frac{95}{200} = 0,475 \neq 0,40625$$

Nicht unabhängig. Sportliche Personen sind in dieser Stichprobe häufiger gesund.

Lösung 3

a)

	defekt	einwandfrei	Σ
M_1	12	288	300
M_2	6	194	200
Σ	18	482	500

$$\text{b) } P_{M_1}(\text{defekt}) = \frac{12}{300} = 0,04$$

Lösungen

$$P_{M_2}(\text{defekt}) = \frac{6}{200} = 0,03$$

c) M_1 hat die höhere Defektquote (4 % vs. 3 %).

$$\text{d) } P(\text{defekt}) = \frac{18}{500} = 0,036$$

$$P(\text{defekt}) \cdot P(M_1) = 0,036 \cdot 0,6 = 0,0216$$

$$P(\text{defekt} \cap M_1) = \frac{12}{500} = 0,024 \neq 0,0216 \rightarrow \text{nicht unabhängig.}$$

Lösung 4

a)

	Schlafstörung	keine	Σ
Kaffee	162	108	270
kein Kaffee	42	168	210
Σ	204	276	480

$$\text{b) } P_{\text{Kaffee}}(\text{Schlafst.}) = \frac{162}{270} = 0,6$$

$$P_{\text{kein Kaffee}}(\text{Schlafst.}) = \frac{42}{210} = 0,2$$

$$\text{c) } P(\text{Schlafst.}) = \frac{204}{480} = 0,425$$

$$P(\text{Schlafst.}) \cdot P(\text{Kaffee}) = 0,425 \cdot 0,5625 \approx 0,239$$

$$P(\text{Schlafst.} \cap \text{Kaffee}) = \frac{162}{480} = 0,3375 \neq 0,239 \rightarrow \text{nicht unabhängig.}$$

d) Kaffeekonsum und Schlafstörungen korrelieren in dieser Stichprobe — das beweist aber noch keine Kausalität.

Lösung 5

$$\text{a) } P(A \cap B) = P_B(A) \cdot P(B) = 0,75 \cdot 0,4 = 0,3$$

b) Für $n = 1000$:

	B	$\bar{B}$	Σ
A	300	200	500
$\bar{A}$	100	400	500
Σ	400	600	1000

$$\text{c) } P(A) \cdot P(B) = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2 \neq 0,3 = P(A \cap B) \rightarrow \text{nicht unabhängig.}$$

Lösung 6

$$n(\text{iOS}) = 600\,000, n(\text{Android}) = 400\,000$$

$$n(\text{Kauf} \cap \text{iOS}) = \frac{1}{3} \cdot 600\,000 = 200\,000$$

$$n(\text{Kauf} \cap \text{Android}) = \frac{1}{4} \cdot 400\,000 = 100\,000$$

a)

	Kauf	kein Kauf	Σ
iOS	200 000	400 000	600 000
Android	100 000	300 000	400 000
Σ	300 000	700 000	1 000 000

$$\text{b) } P_{\text{iOS}}(\text{Kauf}) = \frac{200\,000}{600\,000} = \frac{1}{3}$$

$$P(\text{Kauf}) = \frac{300\,000}{1\,000\,000} = 0,3$$

$$\text{c) } P(\text{Kauf}) \cdot P(\text{iOS}) = 0,3 \cdot 0,6 = 0,18$$

$$P(\text{Kauf} \cap \text{iOS}) = 0,2 \neq 0,18 \rightarrow \text{nicht unabhängig.}$$

iOS-Nutzer kaufen häufiger, auch wenn der Unterschied klein wirkt.

Lösung 7

$$\text{a) } P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12} = P(A \cap B)$$

Stochastisch unabhängig — ohne n zu kennen.

$$\text{b) } P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/12}{1/4} = \frac{1}{3}$$

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/12}{1/3} = \frac{1}{4}$$

$$\text{c) } P_B(A) = \frac{1}{3} = P(A) \text{ — das Eintreten von } B \text{ ändert die Wahrscheinlichkeit von } A \text{ nicht.}$$

Das ist genau die Definition stochastischer Unabhängigkeit.