

Ableitungen — Tangente, Normale und Extrempunkte

Klasse 11

2026-05-14

Aufgaben

Aufgabe 1

Gegeben ist $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

- a) Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt mit $x_0 = 1$.
- b) Bestimme die Gleichung der Tangente im Punkt mit $x_0 = 0$.

Gegeben ist außerdem $f_2(x) = -x^3 + 4x$.

- c) Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen von f_2 im Punkt mit $x_0 = 1$.
- d) Bestimme die Gleichung der **Normalen** an den Graphen von f_2 im Punkt mit $x_0 = 1$.

Aufgabe 2

Berechne die Ableitung für

$$g(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - x + 5.$$

Dann leite die Ableitungsfunktion ab und ebenso die wiederum daraus resultierende Funktion.

Hinweis: Man schreibt dazu dann $g'(x)$, $g''(x)$ und $g'''(x)$. Dann ist $g'''(x)$ die Ableitung von der Ableitung der Ableitung von $g(x)$.

Aufgabe 3

Berechne die Ableitung $p'(x)$ von

$$p(x) = 7x^{15} - \frac{3}{2}x^{12} + 4x^{10} - x^9 + 6x^7 - 2x^5 + \frac{1}{3}x^4 - 8x^3 + 5x - 9.$$

Aufgabe 4

Der Spieler „NoobSlayer99“ berechnet seinen Schaden pro Sekunde in Abhängigkeit von seinem Level x :

$$D(x) = 3x^4 - 40x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 100x$$

- a) Berechne $D'(x)$.
- b) Berechne $D'(1)$ und interpretiere das Ergebnis: Mit welcher Rate verändert sich sein Schaden, wenn er von Level 1 auf Level 2 aufsteigt?

Lösungen

Grundidee

Die **Ableitung** $f'(x)$ gibt die Steigung des Graphen von f an der Stelle x an. Für Polynome gelten drei Rechenregeln:

Regel	Formel
Potenzregel	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
Faktorregel	$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
Summenregel	$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

Tangentengleichung an der Stelle x :

$$t: y = f'(x_0) \cdot (x) + t$$

t kann durch einsetzen des gegebenen Punktes berechnet werden, wenn die Steigung m bereits errechnet wurde.

Normalengleichung an der Stelle x_0 (senkrecht zur Tangente, falls $f'(x_0) \neq 0$):

$$n: y = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Lösung 1

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2, \quad f'(x) = 3x^2 - 6x$$

a) $x_0 = 1$:

$$f(1) = 1 - 3 + 2 = 0, \quad f'(1) = 3 - 6 = -3$$

$$t: y = -3(x - 1) + 0 = -3x + 3$$

b) $x_0 = 0$:

$$f(0) = 2, \quad f'(0) = 0$$

$$t: y = 2 \quad (\text{waagerechte Tangente — lokales Maximum})$$

$$f_2(x) = -x^3 + 4x, \quad f'_2(x) = -3x^2 + 4$$

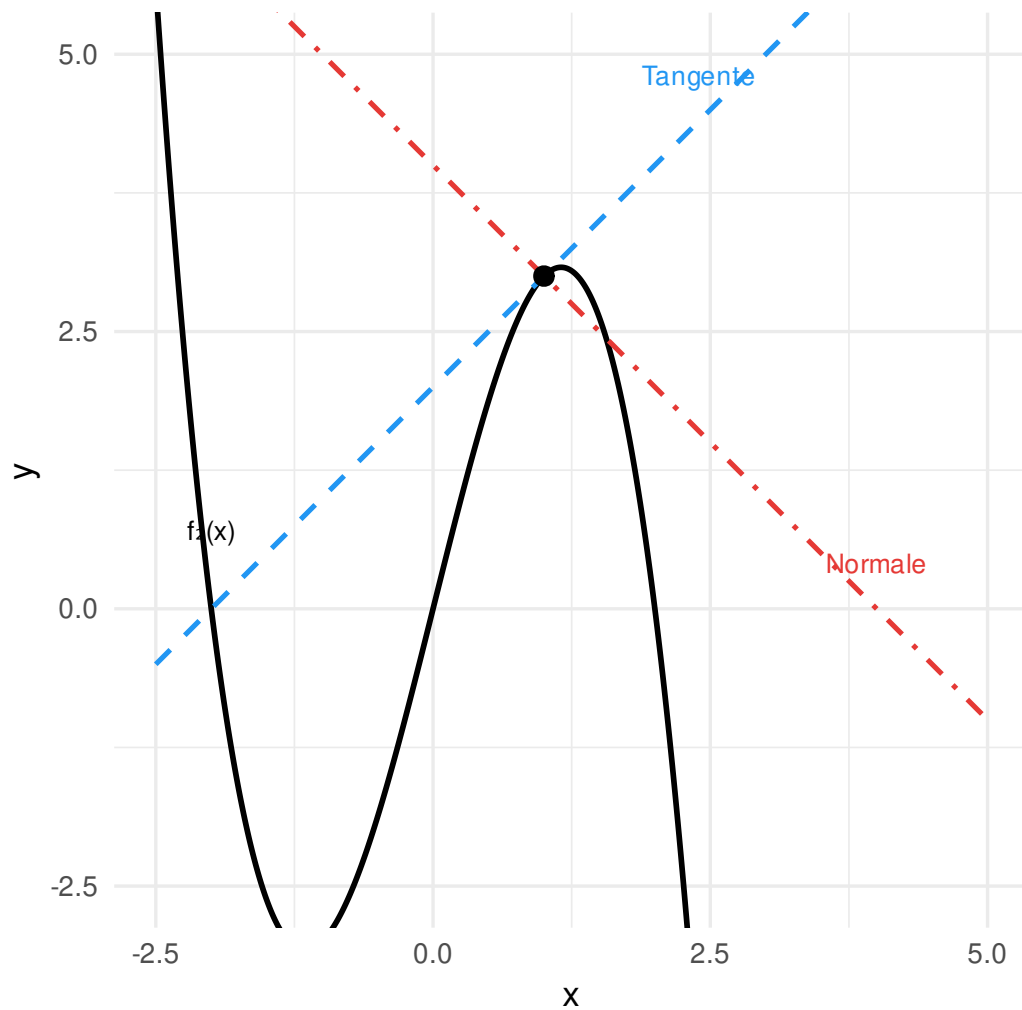
c) Tangente bei $x_0 = 1$:

$$f_2(1) = -1 + 4 = 3, \quad f'_2(1) = -3 + 4 = 1$$

$$t: y = 1 \cdot (x - 1) + 3 = x + 2$$

d) Normale bei $x_0 = 1$ (Tangentensteigung 1, also Normalensteigung -1):

$$n: y = -1 \cdot (x - 1) + 3 = -x + 4$$



Lösung 2 — $g(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - x + 5$

$$g'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x - 1$$

$$g''(x) = 36x^2 - 48x + 12$$

$$g'''(x) = 72x - 48$$

Lösung 3 — $p(x) = 7x^{15} - \frac{3}{2}x^{12} + \dots - 9$

Jedes Glied wird einzeln mit der Potenz- und Faktorregel abgeleitet, die Konstante -9 fällt weg:

$$p'(x) = 105x^{14} - 18x^{11} + 40x^9 - 9x^8 + 42x^6 - 10x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 24x^2 + 5$$

Lösung 4 — $D(x) = 3x^4 - 40x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 100x$

a)

$$D'(x) = 12x^3 - 120x^2 + 3x + 100$$

b)

$$D'(1) = 12 - 120 + 3 + 100 = -5$$

Von Level 1 auf 2 sinkt sein Schaden um 5. NoobSlayer99 wird mit dem Aufsteigen zunächst schwächer.